Fiche 5
Mesures
Intégrales

Exercice 1. (Mesure image) Soient $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{R}^n$ une fonction mesurable. Soit μ une mesure sur $\mathscr{M}$. Nous définissons $f_*\mu : \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ par $f_*\mu(A) := \mu(f^{-1}(A))$, $\forall\, A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$. Rappelons que $f_*\mu$ est une mesure sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$. C'est la *mesure image* de μ par f.

a) Déterminer $f_*\delta_a$, avec $a \in X$.
b) Soit μ une probabilité sur X (donc $\mu(X) = 1$). Nous prenons $n = 1$. Si $B \in \mathscr{M}$, déterminer $(\chi_B)_*\mu$.

Exercice 2. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(U) = 0$ si et seulement si $U = \varnothing$.

Exercice 3. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Si $A \subset \mathbb{R}$ est borélien et si $\lambda(A) > 0$, alors il existe un ouvert non vide $U \subset \mathbb{R}$ tel que $U \subset A$.
Et réciproquement ?
b) Si $A \subset \mathbb{R}$ est borélien et si $\lambda(A) < \infty$, alors A est borné.

Exercice 4. Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré.
Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Une partie d'un ensemble négligeable est négligeable.
b) Une union a. p. d. d'ensembles négligeables est négligeable.
c) Une union d'ensembles négligeables est négligeable.

Exercice 5. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Si $f : X \to [0, \infty]$ est mesurable et satisfait $\mu(f^{-1}(\infty)) = 0$, alors f est intégrable.
b) Si $f : X \to [0, \infty]$ est mesurable et satisfait $\int f \, d\mu = 0$, alors $f = 0$.
c) Le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

Exercice 6. Dans cet exercice, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

a) Soit $I :=]0, 1[$. Soit $0 < \alpha < \infty$. À quelle condition la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est-elle intégrable sur I ?
b) Même question avec $I := [1, \infty[$ et $I :=]0, \infty[$.

Exercice 7. a) On considère la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Montrer que f est Lebesgue intégrable sur $[0, 1]$ et calculer son intégrale.

b) Mêmes questions pour la fonction $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} \sin x, & \text{si } \cos x \in \mathbb{Q} \\ \sin^2 x, & \text{si } \cos x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Exercice 8. Soit $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ tel que $\lambda(B) > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un borélien $A \subset B$ tel que $0 < \lambda(A) < \varepsilon$. Indication : recouvrir B avec des intervalles disjoints de taille $< \varepsilon$.

Exercice 9. a) Soit μ une mesure borélienne de probabilité sur $[0,1]$, avec la propriété suivante :

$$\mu(B) > 0 \implies \mu([0,1]\backslash B) = 0, \ \forall\, B \in \mathscr{B}_{[0,1]}.$$

(i) Construire une suite d'intervalles fermés $(I_j)_{j\geq 0} \subset [0,1]$ avec les propriétés suivantes : $I_0 = [0,1]$, $I_{j+1} \subset I_j$, $\forall\, j \geq 0$, I_j est de longueur 2^{-j}, $\forall\, j \geq 0$, et $\mu(I_j) = 1$, $\forall\, j \geq 0$.
(ii) En déduire qu'il existe un point $a \in [0,1]$ tel que $\mu = \delta_a$.

b) Soit ν une mesure borélienne σ-finie sur $\mathbb{R}$ avec la propriété suivante :

$$\nu(B) > 0 \implies \nu(\mathbb{R}\backslash B) = 0, \ \forall\, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}.$$

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in [0,\infty[$ tels que $\nu = b\,\delta_a$.

Exercice 10. Le but de cet exercice est de donner une définition équivalente de λ comme la seule mesure borélienne normée et invariante par translations.

a) Montrer que, si $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, alors $x + A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.
b) On fixe $x \in \mathbb{R}$. Soit $\mu : \mathscr{B}_{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$ définie par $\mu(A) := \lambda(x + A)$ pour $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. Montrer que μ est une mesure sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.
c) En déduire que $\lambda(x + A) = \lambda(A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire : *la mesure de Lebesgue est invariante par translations*.
d) Inversement, soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$, invariante par translations et telle que $\mu([0,1[) = 1$. Calculer $\mu([0,1/n[)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la mesure d'un intervalle arbitraire. Montrer que $\mu = \lambda$.
e) Prouver ou réfuter. Une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$, invariante par translations, est un multiple de la mesure de Lebesgue.

Exercice 11. Soit $\lambda = \lambda_1$ la mesure de Lebesgue (complète) dans $\mathbb{R}$.

a) Soient f et g deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f = g\ \lambda -$ p. p. $\iff f = g$.

   De même pour $f, g : A \to \mathbb{R}$, avec $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que $A \subset \overline{\mathring{A}}$.
b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nous considérons les deux propriétés suivantes.

   (P1) f est continue λ-p. p.

   (P2) Il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f = g$ λ-p. p.

   Montrer que (P1) n'implique pas (P2), et que (P2) n'implique pas (P1).
c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un ouvert U dense dans $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(U) \leq \varepsilon$.

Exercice 12. Pour des fonctions f, g définies sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{R}^n$, la relation $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ μ-p. p. est une équivalence.