

Fiche 6
Convergence monotone et dominée.

Exercice 1. a) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x^2}$ est Lebesgue intégrable sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas Lebesgue intégrable sur $]0, +\infty[$ alors que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge au sens des intégrales de Riemann généralisées.

c) Considérons pour $\alpha > 0$, $f_\alpha : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_\alpha(n) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. Soit μ la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$. La fonction f_α est-elle μ -intégrable pour $\alpha = 1$, respectivement $\alpha = 2$?

Exercice 2. Soit P une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n := \int_{\mathbb{R}} (\cos \pi t)^{2n} dP(t)$.

a) Montrer que $I_n < \infty, \forall n$.

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

c) Déterminer $\lim_n I_n$.

Exercice 3. Soit P une probabilité sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+})$. Pour $x \geq 0$, soit $F(x) := \int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt} dP(t)$.

a) Montrer que F est décroissante.

b) Soit $(x_n) \subset \mathbb{R}_+$ telle que $x_n \nearrow \infty$. Déterminer $\lim_n F(x_n)$.

c) En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$.

Exercice 4. Déterminer la valeur de

$$\sum_{n=3}^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} dx.$$

Exercice 5. Déterminer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_n \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx$.

Exercice 6. Calculer $\lim_n \int_1^{\infty} \frac{n \sin(x/n)}{x^3} dx$.

Exercice 7. Dans cet exercice, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Borel λ . Montrer que les fonctions suivantes sont intégrables sur I et déterminer $\lim_n \int_I f_n d\lambda$.

a) $I := [0, 1]$, $f_n(x) := \frac{nx \sin x}{1 + (nx)^\alpha}$, où $1 < \alpha < 2$.

b) $I := [A, \infty[$ (avec $A > 0$) et $f_n(x) := \frac{n^2 x \exp(-n^2 x^2)}{1 + x^2}$.

c) $I := [0, 1]$ et $f_n(x) := \sqrt{n} \chi_{[1/n, 2/n]}(x)$.

Exercice 8. (Théorème de convergence décroissante) Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite *décroissante* de fonctions mesurables *positives* sur X , avec f_0 intégrable.

a) Montrer (via le théorème de convergence monotone) que $\lim_n \int f_n d\mu = \int \lim_n f_n d\mu$.

b) Montrer par un contre-exemple que l'hypothèse $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que f_{n_0} intégrable, est nécessaire.

Exercice 9. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : X \rightarrow [0, \infty]$ une application mesurable.

a) Soient $A := \{x \in X ; f(x) > 1\}$, $B := \{x \in X ; f(x) = 1\}$ et $C := \{x \in X ; f(x) < 1\}$.

Déterminer $\lim_n \int_{A \cup B} f^n d\mu$.

b) Déterminer $\lim_n \int_X f^n d\mu$. On pourra commencer par le cas où $\int_X f d\mu < \infty$.

Exercice 10. Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

a) Pour $n \geq 0$, soit $A_n := \{x \in X ; |f(x)| \geq n\}$. Déterminer $\lim_n \int_{A_n} f d\mu$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(A) < \infty$. Déterminer $\lim_n \int_A |f|^{1/n} d\mu$.