

Fiche 8
Intégrales à paramètre.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue intégrable. Montrer que la *transformée de Fourier de f* , définie par

$$\hat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) d\lambda(x), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (transformée de Laplace). Soit $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Nous posons

$$F(t) := \int_0^{\infty} e^{-xt} f(x) dx, \quad \forall t > 0;$$

c'est la *transformée de Laplace de f* . (La fonction F est plus communément notée $\mathcal{L}f$.)

- Montrer que F est de classe C^∞ sur $]0, \infty[$ et exprimer pour tout $k \geq 1$ et tout $x > 0$, $F^{(k)}(t)$ sous forme d'une intégrale.
- Déduire de la question précédente la valeur de $\int_0^{\infty} x^k e^{-x} dx$, $\forall k \geq 1$.

Exercice 3. a) Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombre réels (ou complexes). Soient

$$R := \sup\{r \geq 0 ; a_n r^n \text{ borné}\}$$

et $I :=]-R, R[$. Posons $F(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\forall x \in I$. Montrer que $F \in C^\infty(I)$ et que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in I, \quad F^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

- Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n x^{n-1}$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Exercice 4. Soit $f(t, x) := \frac{t-1}{\ln t} t^x$ pour $t \in]0, 1[$ et $x \in \mathbb{R}$.

- Montrer que $F(x) := \int_0^1 f(t, x) dt$ est finie si et seulement si $x > -1$.
- Montrer que F est de classe C^1 sur $] -1, \infty[$ et calculer F' sur $] -1, \infty[$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$. En déduire la valeur de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Pour $x \geq 0$, soient

$$F(x) := \left(\int_0^x \exp(-t^2) dt \right)^2 \quad \text{et} \quad G(x) := \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2} dt.$$

- Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
- Calculer $F'(x) + G'(x)$ pour $x \geq 0$.
- En déduire la valeur de $I := \int_0^{\infty} \exp(-t^2) dt$, ainsi que la valeur de $J := \int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2/2) dt$.

Exercice 6 (fonction zêta de Riemann). La fonction zêta de Riemann est donnée par la formule

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \forall s > 1.$$

Montrer que $\zeta :]1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ .

Exercice 7. Soit $f(x) := \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt, \forall x \in \mathbb{R}$.

- Montrer que f est finie si et seulement si $x > 0$.
- Montrer que f est continue sur $]0, \infty[$.
- Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$. En déduire la valeur de $\lim_{x \searrow 0} x f(x)$.

Exercice 8. a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. Notons K sa somme.

- Pour $x \in]-1, 1[$, posons $f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Montrer que f est de classe C^1 sur $] -1, 1[$ et calculer f' .
- Déterminer f sur $] -1, 1[$ et $\lim_{x \searrow -1} f(x)$.
- En déduire la valeur de K .

Exercice 9. Soit $I(\alpha) := \int_0^\infty \frac{\ln(1 + \alpha x^2)}{1 + x^2} dx, \alpha \geq 0$.

- Montrer que la fonction $I : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Donner une expression de $I'(\alpha)$ si $\alpha > 0$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Décomposer la fraction $\frac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples. En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.
- Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geq 0$.

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) := \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 e^{-tx} dx$.

- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Calculer f'' et les limites à l'infini de f et f' .
- En déduire une expression simple de f .

Exercice 11. Soit P une probabilité sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+})$.

- Montrer que, pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto \cos(xt)$ est P -intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soit

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}_+} \cos(xt) dP(x), \forall t \geq 0.$$

- Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Nous supposons que l'application $x \mapsto x^2$ est P -intégrable. Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - F(t)}{t^2}$.

(On pourra établir et utiliser l'inégalité $1 - \cos u \leq u^2/2$.)

- « Réciproquement », supposons $\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{1 - F(t)}{t^2} < \infty$. Montrer que l'application $x \mapsto x^2$ est P -intégrable. (On pourra utiliser le lemme de Fatou.)