
Fiche 9
Intégrales à paramètre.

Exercice 1 (transformée de Fourier d'une gaussienne). Soit $a > 0$. Soit $g_a(x) := \mathrm{e}^{-ax^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Nous nous proposons de calculer la transformée de Fourier de g_a, donnée par $h_a(t) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\imath tx} g_a(x)\, d\lambda(x)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Rappelons que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

a) Montrer que g_a est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $h_a(0)$.
b) Montrer que h_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h'_a(t)$ sous forme d'une intégrale.
c) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h'_a(t) = (-t\, h_a(t))/(2a)$.
d) En déduire quepour tout $t \in \mathbb{R}$, $h_a(t) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, \mathrm{e}^{-t^2/(4a)}$.

Exercice 2. Pour $x > 0$ et $t > 0$, soit $f(x,t) := \dfrac{\exp(-x) - \exp(-tx)}{x}$.

a) Montrer que pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Pour $t > 0$, soit $F(t) := \int_0^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x$.
b) Montrer que F est continue sur $]0,\infty[$.
c) Montrer que F est dérivable sur $]0,\infty[$.
d) Calculer $F'(t)$ et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t > 0$.

Exercice 3 (fonction gamma d'Euler).

a) Montrer que pour tout $x > 0$, l'application $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^*$. La *fonction gamma d'Euler* est définie par
$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\ \forall\, x > 0.$$
b) Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
c) Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
d) Montrer que Γ est strictement convexe.

Exercice 4 (continuité de l'intégrale définie). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Lebesgue. Posons
$$F(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_{[0,x]} f(t)\, d\lambda(t), & \text{si } x \geq 0 \\ \displaystyle -\int_{[x,0]} f(t)\, d\lambda(t), & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que, si f est continue en 1, alors F est dérivable en 1 et $F'(1) = f(1)$.
c) De même si on suppose f *localement intégrable*, c'est-à-dire que f est (Lebesgue) mesurable et $\int_K |f(t)|\, d\lambda(t) < \infty$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$.

Exercice 5. Pour $x \in \mathbb{R}$, soient $F(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $G(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

a) Montrer que F et G sont continues sur $\mathbb{R}$. Calculer $F(0)$ et $G(0)$.

b) Montrer que

$$F(0) - F(x) + G(x) = C\,|x|,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \text{où}\, C := \int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

c) (i) Montrer que G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que l'on a $G''(x) = F(x)$ pour tout réel x.

(ii) En utilisant la question b), en déduire que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et est solution d'une équation différentielle du second ordre que l'on déterminera.

(iii) En déduire l'expression de $F(x)$ pour $x > 0$ (on pourra remarquer que la fonction F est bornée sur $\mathbb{R}$). Calculer enfin $F(x)$ pour tout réel x.

d) Déduire de tout ceci la valeur de la constante C.

Exercice 6. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $F(x) := \displaystyle\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{t^2} + t^2\right)\right)\,\mathrm{d}t.$

a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

c) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $F'(x) = -F(x)$.

d) En déduire la valeur de $F(x)$ pour x réel.
On rappelle que $J := \int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$ (TD8, exercice 5).

Exercice 7. Pour $y \geq 0$, soit $F(y) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\exp(-x^2 y)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Calculer $F(0)$ et déterminer $\displaystyle\lim_{y\to\infty} F(y)$.

c) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Montrer que F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle du premier ordre s'exprimant à l'aide de $I := \int_0^\infty \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$.

e) En déduire, sous forme intégrale, une expression de $F(y)$ valable pour $y \geq 0$.

f) Pour finir, retrouver (une n-ième fois !) la valeur de I.

Exercice 8. Soit $F(t) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\arctan(tx)}{x\,(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$

a) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(t)$, puis $F(t)$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2\,\mathrm{d}x.$

Exercice 9. Nous admettons la convergence de l'intégrale généralisée $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$

Pour tout $t \geq 0$, posons $S(t) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\sin x\,\mathrm{d}x.$

a) Montrer que S est de classe C^1 sur $]0,\infty[$ et calculer $S'(t)$ pour $t > 0$.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to\infty} S(t)$ et calculer $S(t)$ pour tout $t > 0$.

c) Soient $A > 0$ et $t > 0$.

(i) Montrer que $\displaystyle\left|\int_A^\infty \frac{\mathrm{e}^{-tx}\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{2}{A}.$

(ii) Prouver que, pour tout $A > 0$, on a $\displaystyle\lim_{t\searrow 0}\int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-tx}\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^A \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$

(iii) En déduire la valeur de I.

Exercice 10. Posons $F(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$.

a) Déterminer l'ensemble $D := \{x \in \mathbb{R}\,;\ F(x) \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F est continue sur D.

b) Démontrer que F est de classe C^1 sur D et que

$$F'(x) = \int_1^\infty \frac{t^x \ln t}{(1+t^x)^2}\left(\frac{1}{t^2} - 1\right) \mathrm{d}t,\ \forall\, x \in D.$$

En déduire le sens de variation de F.

c) Déterminer la limite à l'infini de F.

d) Calculer $\displaystyle\lim_{x \searrow 1} \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$ et $\displaystyle\lim_{x \searrow 1} F(x)$.

Exercice 11. Le but de cet exercice est de démontrer, pour tout $x > 0$, l'identité

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\sin t}{x+t}\mathrm{d}t,$$

et d'en déduire (à nouveau !) la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Soit $f(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,\ \forall\, x \geq 0$.
  (i) Montrer que f est bien définie et continue sur $[0, \infty[$.
  (ii) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, \infty[$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x > 0$.
  (iii) Montrer que $f(x) + f''(x) = \dfrac{1}{x},\ \forall\, x > 0$.

b) Soit $g(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t,\ \forall\, x \geq 0$. Rappelons que $g(0)$ existe (en tant qu'intégrale généralisée).
  (i) Montrer, par intégration par parties, que $g(x)$ existe pour tout $x > 0$ (en tant qu'intégrale généralisée).
  (ii) Par un changement de variables, prouver pour $x > 0$ l'identité

$$g(x) = \cos x \int_x^\infty \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \sin x \int_x^\infty \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

  (iii) Montrer que $g(x)$ est de classe C^2 sur $]0, \infty[$ et calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour $x > 0$.
  (iv) Montrer que pour tout $x > 0$, $g(x) + g''(x) = \dfrac{1}{x}$.

c) Dans cette partie, nous nous proposons de montrer l'égalité de f et de g sur $]0, \infty[$.
  (i) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ et que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.
  (ii) À partir de l'équation différentielle du second ordre satisfaite par les deux fonctions, en déduire que $f(x) = g(x)$ pour $x > 0$.

d) Dans cette partie, nous nous proposons de trouver $g(0)$.
  (i) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\searrow 0} g(x) = g(0)$.
  (ii) En déduire la valeur de $g(0)$.

Exercice 12 (extension harmonique)**.** Soit

$$U := \mathbb{R} \times\,]0, \infty[\, = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ y > 0\}.$$

Si $(x, y) \in U$, soit $P_y(x) := \dfrac{1}{\pi}\dfrac{y}{x^2+y^2}$; on appelle P_y le *noyau de Poisson*. Si f est intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, posons

$$u(x, y) := \int_{\mathbb{R}} P_y(x-t)\, f(t)\,\mathrm{d}t,\ \forall\, (x, y) \in U.$$

a) Montrer que u est finie en tout point de U.
b) Montrer que u est de classe C^2 sur U.
c) Montrer que $\Delta u = 0$, où $\Delta u(x, y) := \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ est le *laplacien*.
d) Si f est continue et bornée, montrer que

$$\lim_{y \searrow 0} u(x, y) = f(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, la fonction u est « la » (en fait, une) solution du *problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times]0, \infty[\ ; \\ \lim_{y \searrow 0} u(x, y) = f(x), & \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Cette fonction u est l'*extension harmonique* de f.