Mesure et intégration

CT du 19/12/2025

Corrigé succint

Ex 1 : a) Oui, par déf. de la mesure vu que $X = A \cup A^c$ et A, A^c disjoints.

b) Oui, par le cours, vu que $\bigcap_{n \geq 0} A_n = \bigcap_{n \geq 2} A_n$

c) Non, B peut être de mesure nulle et $\subset A$.

d) Oui, $X = \{a, b\}$ avec $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$

$\mu(\emptyset) = 0$

$\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 1$

$\mu(\{a, b\}) = 2$

e) Non, par l'absurde soit un tel espace.

On a forcément $\mu(X) = 3$. Soit A tel que

$\mu(A) = 1 \Rightarrow \mu(A^c) = \mu(X) - \mu(A) = 3 - 1 = 2$

impossible

f) Elle n'est pas finie car $\mu(\mathbb{N}) = +\infty$ mais elle est σ-finie car $\mathbb{N} = \bigcup_n \{n\}$ et $\mu(\{n\}) = 1 < \infty$.

7) Non. Contre-exemple $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathcal{A} = \{]a,+\infty[, a \in \mathbb{R}\}$

μ_1 = mesure de Borel et μ_2 = mesure de comptage.

Ex 2 : a) On vérifie aisément les hypothèses du critère de dérivabilité des int. à paramètre, notamment la domination de la dérivée :

$$\left| \frac{d}{dt}\left(e^{-tx} \frac{\sin^2 x}{x} \right) \right| = \left| e^{-tx} \sin^2 x \right| \leq e^{-\varepsilon x} \in L^1(\mathbb{R}_+) \quad \forall\, t > \varepsilon$$

d'où la dérivabilité sur $]\varepsilon,+\infty[$ $\forall\, \varepsilon > 0$ donc sur $]0,+\infty[$

La même domination implique aussi la continuité de la dérivée (crit. cont. int. à param). Donc $F \in C^1(\mathbb{R}_+^*)$ et

$$F'(t) = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{-tx} \frac{\sin^2 x}{x} \right) dx$$

$$= - \int_0^\infty e^{-tx} \sin^2 x \, dx$$

b) On a la domination

$$\left| e^{-tx} \frac{\sin^2 x}{x} \right| \leq e^{-x} \frac{\sin^2 x}{x} \leq e^{-x} \in L^1(\mathbb{R}_+) \quad \forall\, t \geq 1$$

et la limite $e^{-tx} \frac{\sin^2 x}{x} \xrightarrow{t \to \infty} 0 \quad \forall\, x \geq 0$

donc par le th. de conv. dominée de Lebesgue

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$$

$$= \int_0^\infty \lim_{t\to\infty} \left(e^{-tx} \frac{\sin^2 x}{x} \right) dx$$

$$= \int_0^\infty 0 \, dx = 0$$

c) Par a)

$$F'(t) = - \int_0^\infty e^{-tx} \sin^2 x \, dx$$

$$= - \int_0^\infty e^{-tx} \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx$$

$$= - \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-tx} \frac{(1-e^{2ix})}{2} \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty e^{-tx} \, dx - \int_0^\infty e^{-(t-2i)x} \, dx \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-tx}}{-t} \Bigg|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{e^{-(t-2i)x}}{-(t-2i)} \Bigg|_{x=0}^{x=\infty} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-2i} \right)$$

$$= -\frac{1}{2t} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{t+2i}{t^2+4} =$$

$$= -\frac{1}{2t} + \frac{1}{2} \frac{t}{t^2+4} .$$

$$= \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{t^2+4}}{t} \right)'$$

Donc $\exists C$ t.q. $F(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{t^2+4}}{t} + C$

En faisant $t \to \infty$ on trouve $C = 0$ donc

$$\boxed{F(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{t^2+4}}{t}}$$

Ex 3 : a) f est cont donc mesurable. Puis

$$\int_{[a,b]\times[0,L]} |f| \le \int_{[a,b]\times[0,L]} 1 = (b-a)L < \infty$$

b) Par le th. de Fubini qui est justifié vu a),

$$\int_a^b \left(\int_0^L \min(x,y)\, dy \right) dx = \int_0^L \left(\int_a^b \min(x,y)\, dx \right) dy$$

Des calculs explicites immédiats montrent que

$$\int_a^b \sin(xy)\, dx = -\frac{\cos(xy)}{y}\Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{\cos(ay)-\cos(by)}{y}$$

$\forall y \neq 0$

et
$$\int_0^L \sin(xy)\, dy = -\frac{\cos(xy)}{x}\Big|_{y=0}^{y=L} = \frac{1-\cos(Lx)}{x}$$

$\forall x \neq 0$

Donc

$$\int_0^L \frac{\cos(ay)-\cos(by)}{y}\, dy = \int_a^b \frac{1-\cos(Lx)}{x}\, dx$$

$$= \int_a^b \frac{1}{x} - \frac{1}{L}\int_a^b \left(\sin(Lx)\right)' \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{1}{L}\left(\frac{\sin(Lb)}{b} - \frac{\sin(La)}{a}\right)$$

$$- \frac{1}{L}\int_a^b \frac{\sin(Lx)}{x^2}\, dx$$

$$\xrightarrow{L\to\infty} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(en majorant $|\sin| \leq 1$)

c) $\cos x - \cos(2x) \geq 1 \iff$

$\iff \cos x - 2\cos^2 x + 1 \geq 1$.

$\iff \cos x(1 - 2\cos x) \geq 0$

$\iff 0 \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$

ce qui est vrai sur $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ et par périodicité sur $[\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi]$.

d) Non, car

$$\int_0^\infty \left| \frac{\cos x - \cos(2x)}{x} \right| dx$$

$$\geq \int_{\bigcup_{n\geq 0} [\frac{\pi}{3}+2n\pi, \frac{\pi}{2}+2n\pi]} \left| \frac{\cos x - \cos(2x)}{x} \right| dx$$

$$\geq \sum_{n\geq 0} \int_{[\frac{\pi}{3}+2n\pi, \frac{\pi}{2}+2n\pi]} \frac{1}{x} dx$$

$$= \sum_{n\geq 0} \ln \frac{\frac{\pi}{2}+2n\pi}{\frac{\pi}{3}+2n\pi} = +\infty$$

car $\ln \frac{\frac{\pi}{2}+2n\pi}{\frac{\pi}{3}+2n\pi} = \ln\left(1 + \frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{3}+2n\pi}\right) \sim \frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{3}+2n\pi} \sim \frac{1}{12n}$ et $\sum_n \frac{1}{12n} = +\infty$

e) Non, si elle l'était alors par le th. de Fubini on aurait que la fonction

$$y \to \int_1^2 f(x,y)\,dx \quad \text{est int sur } \mathbb{R}_+.$$

Or, les calculs du b) montrent que cette fonction est égale à $\dfrac{\cos y - \cos(2y)}{y}$ qui, par d), n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Ex 4 : a) On écrit $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$

où $U_1 = f_1^{-1}(]0,+\infty[)$, $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_1(x,y) = x$

$U_2 = f_2^{-1}(]0,+\infty[)$, $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_2(x,y) = y - x^2$

$U_3 = f_3^{-1}(]0,1[)$, $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_3(x,y) = x^2 y$

Les fonctions f_1, f_2, f_3 sont continues donc U_1, U_2, U_3 sont des ouverts comme images inverses d'ouverts par une fonct cont, donc $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ est ouvert aussi

b) De toute évidence

$$\varphi(U) \subset V := \{(a,b)\ ;\ 0<a<1 \text{ et } b>1\}$$
$$=]0,1[\times]1,+\infty[$$

On va montrer que φ est un C^1 difféo de U dans V. On vérifie :

- φ est C^1 : évident, les dérivées partielles existent et sont continues.
- φ bij de U dans V : on montre que $\forall (a,b) \in V$, l'équation $\varphi(x,y) = (a,b)$ admet une unique solution dans U.

Soient $(x,y) \in U$ et $(a,b) \in V$

$$\varphi(x,y) = (a,b) \iff \begin{cases} x^2 y = a \\ \dfrac{y}{x^2} = b \end{cases}$$

On multiplie les 2 équ $\Rightarrow$ $y^2 = ab$

$\Rightarrow$ $y = \sqrt{ab}$. La 1re équ donne

$$x^2 \sqrt{ab} = a \quad \Rightarrow x^2 = \sqrt{\frac{a}{b}} \Rightarrow x = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{4}}$$

On a une unique solution qui est donnée par $(x,y) = \left(a^{\frac{1}{4}} b^{-\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}\right)$.

On voit tout de suite que cette solution (x,y) appartient bien à U $\Rightarrow$ φ bij de U dans V.

- $J_\varphi \neq 0$ partout sur U.

La matrice jacobienne de φ est

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} \partial_x(x^2y) & , \partial_y(x^2y) \\ \partial_x\left(\frac{y}{x^2}\right) & , \partial_y\left(\frac{y}{x^2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J_\varphi = \det M_\varphi = \frac{4y}{x} \neq 0 \quad \forall (x,y) \in U.$$

On a bien que φ est un C^1 difféo de U dans V.

c) L'intégrande étant positive et mesurable (car continue), on peut faire le changement de variables

$$(x,y) = \psi(a,b) = \left(a^{\frac{1}{4}} b^{-\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}\right)$$

pour obtenir

$$\int_U y^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{y}{x^2}} \, dx \, dy = \int_V f(\psi(a,b)) \, |J_\psi(a,b)| \, da \, db$$

où on a posé $f(x,y) = y^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{y}{x^2}}$

Nous avons :

- $a = x^2 y$, $b = \dfrac{y}{x^2}$ et $\begin{cases} x = a^{\frac{1}{4}} b^{-\frac{1}{4}} \\ y = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \end{cases}$

- $|J_\psi(a,b)| = \dfrac{1}{|J_\varphi(x,y)|} = \dfrac{x}{4y}$

- $f(\psi(a,b)) \, |J_\psi(a,b)| = y^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{y}{x^2}} \dfrac{x}{4y}$

$$= \frac{1}{4} x \, y^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{y}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{4} a^{\frac{1}{4}} b^{-\frac{1}{4}} a^{\frac{5}{4}} b^{\frac{5}{4}} e^{-b}$$

$$= \frac{1}{4} a^{\frac{3}{2}} b \, e^{-b}$$

Par conséquent :

$$\int_U y^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{y}{x^2}} \, dx\,dy = \int_{]0,1[\times]1,+\infty[} \frac{1}{4} a^{\frac{3}{2}} \, b e^{-b} \, da\,db$$

par Fubini-Tonelli $= \frac{1}{4} \int_0^1 a^{\frac{3}{2}} da \int_1^\infty b e^{-b} db$

IPP

$$= \frac{1}{4} \left. \frac{a^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right|_{a=0}^{a=1} \cdot \left(\left. -b e^{-b} \right|_{b=1}^{b=\infty} + \underbrace{\int_1^\infty e^{-b}}_{= \left. -e^{-b} \right|_{b=1}^{b=\infty}} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{\frac{5}{2}} \cdot \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e} \right)$$

$$= \frac{1}{5e}$$