Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2025-2026

Licence de Mathématiques, 3e année, parcours « Mathématiques générales »
Examen terminal – Vendredi 19 décembre 2025 – Durée : 2 h
Mesure et intégration

La justification des réponses et un soin particulier de la présentation sont demandés et pris en compte lors de la notation. Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, montre connectée, etc.) et les documents sont interdits.

Question de cours. Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Définir la notion d'ensemble négligeable.

b) Définir $\overline{\mathscr{M}}$, la tribu complétée par rapport à la mesure μ.

c) Montrer que
$$\overline{\mathscr{M}} = \{E \cup A\,;\ E \in \mathscr{M} \text{ et } A \text{ négligeable}\}.$$

Exercice 1. Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré. Prouver ou réfuter les assertions suivantes en justifiant votre réponse.

a) Si $A \in \mathscr{M}$, alors $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$.

b) Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathscr{M}$ et $\mu(A_2) < \infty$, alors
$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 0} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n).$$

c) Si $A, B \in \mathscr{M}$ et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, alors A et B sont disjoints.

d) Il existe un espace mesuré $(X, \mathscr{M}, \mu)$ tel que $\{\mu(A)\,;\ A \in \mathscr{M}\} = \{0, 1, 2\}$.

e) Il existe un espace mesuré $(X, \mathscr{M}, \mu)$ tel que $\{\mu(A)\,;\ A \in \mathscr{M}\} = \{0, 1, 3\}$.

f) La mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ est finie, respectivement σ-finie.

g) Soient $\mathscr{A}$ une famille qui engendre $\mathscr{M}$ et μ_1, μ_2 deux mesures sur $\mathscr{M}$. On suppose que pour tout A dans $\mathscr{A}$ on a $\mu_1(A) = \mu_2(A)$. Alors pour tout T dans $\mathscr{M}$ on a $\mu_1(T) = \mu_2(T)$.

Exercice 2. Pour $t > 0$, on pose
$$F(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin^2 x}{x}dx.$$

a) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(t)$ pour tout $t > 0$.

b) Montrer que la limite $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)$ existe et la déterminer.

c) Calculer $F(t)$ pour tout $t > 0$.

Exercice 3. Soient a, b, L des réels tels que $0 < a < b$ et $L > 0$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par
$$f(x, y) = \sin(xy).$$

a) Montrer que f est intégrable sur $[a, b] \times [0, L]$, muni de la mesure de Lebesgue.

b) Montrer que
$$\lim_{L\to+\infty} \int_0^L \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}\,dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

On suppose dorénavant que $a = 1$ et $b = 2$ et on rappelle la formule $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\cos(x) - \cos(2x) \geq 1, \quad \forall x \in \Big[\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\Big].$$

d) La fonction $x \mapsto \frac{\cos(x)-\cos(2x)}{x}$ est-elle Lebesgue intégrable sur $]0, +\infty[$?

e) La fonction f est-elle Lebesgue intégrable sur $[1, 2] \times [0, +\infty[$?

Exercice 4. Soit $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0,\ y > x^2,\ 0 < x^2 y < 1\}$.

a) Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que l'application φ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},\ \varphi(x, y) = (x^2 y, \frac{y}{x^2}),$$

est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de U sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ que l'on explicitera.

c) A l'aide de ce changement de variables, calculer

$$\int_U y^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{y}{x^2}} \, dx dy.$$