

Mesure et intégration

Licence de Mathématiques
Université Lyon 1

Dragoş Iftimie

Table des matières

Introduction	2
1 Limites inférieures et supérieures. Dénombrement	3
1.1 Limites inférieures et supérieures	3
1.2 Dénombrement	3
2 Ensembles et fonctions mesurables. Tribus	4
2.1 Tribus. Espaces mesurables	4

Introduction

Ce texte s'inspire fortement des 3 supports de cours de licence suivants :

- T. Gallay, Théorie de la mesure et de l'intégration, Grenoble.
- N. Lerner, Intégration, Rennes.
- P. Mironescu, Mesure et intégration, Lyon.

Nous disposons de la théorie de l'intégrale de Riemann qui permet d'intégrer beaucoup de fonctions dont notamment les fonctions continues. Cette théorie est-elle suffisante pour les besoins de l'intégration ? Voici quelques problèmes posés par l'intégrale de Riemann.

- L'intégrale de Riemann est essentiellement réservée aux fonctions continues, en tout cas il faut au moins que les fonctions soient bornées. Un théorème du à Lebesgue dit d'ailleurs qu'une fonction bornée est intégrable Riemann si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable. En utilisant les intégrales généralisées, on peut aussi traiter des fonctions continues avec quelques singularités ou sur des intervalles non-bornés mais cela reste très limité et pas facile à manipuler.
- Une fonction relativement simple comme la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ n'est pas intégrable Riemann.
- Si f est continue et dérivable, dans quelle mesure l'égalité $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$ est-elle vraie ?
- Très important, dans quelle mesure la convergence simple de f_n vers f implique la convergence de leurs intégrales ? Le critère pour l'intégrale de Riemann nécessite la convergence uniforme de la suite f_n , condition bien trop restrictive.
- Nous avons besoin d'intégrer par rapport à d'autres mesures, par exemple en théorie des probabilités. C'est-à-dire qu'on pourrait convenir que la mesure d'un intervalle $[a, b]$ n'est pas forcément $b - a$. Que devient l'intégrale dans ce cas ?

Pour répondre à ces questions, Lebesgue a construit une autre théorie de l'intégrale que l'on connaît aujourd'hui sous le nom d'intégrale de Lebesgue. Son idée de départ a été très simple ; voici un aperçu (très) simplifié pour donner une petite idée de son approche. Pour mesurer l'aire du sous-graphe d'une fonction (qui est l'intégrale de la fonction), Riemann prenait l'intersection du sous-graphe avec une droite verticale et mesurait la longueur du segment obtenu (puis "sommait" toutes ces longueurs). Lebesgue fait la même chose mais en prenant des droites horizontales au lieu de droites verticales. Étonnamment, cette approche donne une notion d'intégrale bien plus robuste et permet d'intégrer bien plus de fonctions. Malheureusement, contrairement à l'intersection du sous-graphe avec une droite verticale qui est simplement un segment, l'intersection du sous-graphe avec une droite horizontale peut être un ensemble très compliqué. Ce n'est pas clair qu'on puisse le mesurer. On ne peut pas mesurer tous les ensembles. Citons à cet effet le paradoxe de Banach-Tarski qui date de 1923 : ces auteurs ont découpé la boule unité de $\mathbb{R}^3$ en un nombre fini de morceaux qui peuvent être réarrangés pour faire deux boules unité complètes ! Cela veut bien dire que l'on ne peut pas mesurer de manière raisonnable ces morceaux, sinon on aurait d'une part que la mesure de la boule unité est la somme des mesures de ces morceaux, et cette même somme fera aussi le double de la mesure de la boule unité ! Une bonne partie de ce cours sera d'ailleurs dédié à notion de mesurabilité.

1 Limites inférieures et supérieures. Dénombrément

1.1 Limites inférieures et supérieures

Rappelons d'abord que $\overline{\mathbb{R}}$, la droite réelle achevée, est définie par $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On peut additionner et multiplier les éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, à l'exception des indéterminations $(+\infty) + (-\infty)$ et $0 \times (\pm\infty)$. Rappelons maintenant les définitions de sup et inf.

Définition 1.1 (inf, sup). Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ non-vide. On définit $\sup A \in \overline{\mathbb{R}}$ comme le plus petit majorant de A et $\inf A \in \overline{\mathbb{R}}$ comme le plus grand minorant de A .

Soit $(x_n)_n$ une suite de $\overline{\mathbb{R}}$ et posons $y_n = \sup_{k \geq n} x_k$. La suite $y_n \in \overline{\mathbb{R}}$ est décroissante, elle admet donc une limite qui est égale à son inf. Cela justifie la définition suivante.

Définition 1.2 (liminf, limsup). Soit $(x_n)_n$ une suite de $\overline{\mathbb{R}}$.

— On définit la limite supérieure de x_n comme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k = \inf_{n \geq 0} \sup_{k \geq n} x_k.$$

— On définit la limite inférieure de x_n comme

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} x_k = \sup_{n \geq 0} \inf_{k \geq n} x_k.$$

Rappelons enfin que la valeur d'adhérence d'une suite se définit comme la limite d'une sous-suite de la suite en question. Nous travaillerons ici avec des valeurs d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$: on considère que $\pm\infty$ peuvent être des valeurs d'adhérence.

La proposition suivante regroupe plusieurs propriétés des limites inférieures et supérieures.

Proposition 1.3. Soit $(x_n)_n$ une suite de $\overline{\mathbb{R}}$. Nous avons les affirmations suivantes.

- a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de x_n et $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de x_n .
- b) Nous avons que $x_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$ quand $n \rightarrow \infty$ si et seulement si $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.
- c) Si $x_n \leq y_n$ pour tout n , alors $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n$.
- d) Si $(y_n)_n$ est une autre suite de $\overline{\mathbb{R}}$ alors $\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$ dès lors que toutes les sommes sont bien définies.

1.2 Dénombrément

Il existe deux définitions d'un ensemble dénombrable suivant que les ensembles finis sont considérés dénombrables ou pas. Nous adopterons ici la convention qu'ils ne le sont pas.

Définition 1.4 (dénombrabilité). — Un ensemble X est dit dénombrable s'il existe une bijection de X dans $\mathbb{N}$.

— Un ensemble X est dit au plus dénombrable, abrégé en a.p.d., s'il est fini ou dénombrable.

On voit aisément qu'un ensemble est a.p.d. si et seulement s'il peut être écrit comme l'ensemble des éléments d'une suite, tandis qu'un ensemble est dénombrable si et seulement s'il peut être écrit comme l'ensemble des éléments d'une suite injective.

Nous avons les deux propriétés suivantes.

Proposition 1.5. a) Une union a.p.d. d'ensembles a.p.d. est a.p.d..

b) Un produit fini d'ensembles a.p.d. est a.p.d..

Les exemples classiques sont $\mathbb{Q}$ qui est dénombrable et $\mathbb{R}$ qui ne l'est pas.

2 Ensembles et fonctions mesurables. Tribus

2.1 Tribus. Espaces mesurables

Définition 2.1 (tribu, espace mesurable). Soit X un ensemble. Une famille non vide $\mathcal{M}$ de parties de X est une tribu sur X si :

- a) $A \in \mathcal{M}$ implique $A^c \in \mathcal{M}$;
- b) si $A_n \in \mathcal{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$;
- c) $\emptyset, X \in \mathcal{M}$.

Le couple $(X, \mathcal{M})$ est dit espace mesurable et les éléments de $\mathcal{M}$ sont dits ensembles mesurables.

En anglais, une tribu est une “ σ -algebra”, d'où parfois la terminologie σ -algèbre en français.

Remarques.

- Il est facile de voir que si $A, B \in \mathcal{M}$, alors $A \cap B \in \mathcal{M}$ et $A \cup B \in \mathcal{M}$.
- Il est facile de voir que les propriétés a) et b) impliquent c). Une tribu est donc une famille non vide de sous-ensembles stable par union dénombrable et par passage au complémentaire.
- Le complémentaire d'une union étant l'intersection des complémentaires, on en déduit qu'une tribu est aussi stable par intersection dénombrable.

Exemples. Soit X un ensemble.

- $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$ est une tribu.
- $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ est une tribu. Cas particulier $X = \mathbb{N}$: la tribu qui sera considérée sur $\mathbb{N}$ est $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$. La famille $\mathcal{M} = \{\emptyset, X, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ est une tribu sur X .
- Plus généralement, si $A_1, \dots, A_n$ forment une partition de X (disjoints deux à deux et d'union X), alors toutes les unions possibles de A_j forment une tribu sur X . Si on considère par exemple la partition $X = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \{5, 6\}$ on trouve la tribu suivante sur X : $\mathcal{M} = \{\emptyset, X, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}\}$.

Pour définir la tribu engendré par une famille de sous-ensembles, nous avons besoin d'un résultat préliminaire.

Lemme 2.2. Soit X un ensemble et $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ une famille arbitraire de tribus sur X . Alors $\bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i$ est une tribu sur X .

Cela justifie la définition suivante.

Définition 2.3 (tribu engendrée). Soit X un ensemble et $\mathcal{F}$ une famille de parties de X . On définit $\mathcal{M}(\mathcal{F})$, la tribu engendrée par $\mathcal{F}$, comme l'intersection de toutes les tribus de X qui contiennent $\mathcal{F}$.

Nous avons la propriété suivante :

Proposition 2.4. La tribu engendrée par $\mathcal{F}$ est la plus petite tribu qui contient $\mathcal{F}$.

Définissons aussi la tribu trace. D'abord un lemme préliminaire.

Lemme 2.5. Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $A \subset X$ un sous-ensemble arbitraire. L'ensemble $\mathcal{M}_A = A \cap \mathcal{M} = \{A \cap B ; B \in \mathcal{M}\}$ est une tribu sur A .

Définition 2.6 (tribu trace). Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $A \subset X$ un sous-ensemble arbitraire. La tribu trace sur A est la tribu $\mathcal{M}_A = A \cap \mathcal{M} = \{A \cap B ; B \in \mathcal{M}\}$.

Fin du cours 1 (01/09/2026).
