Fiche 10
Mesures produit.

Exercice 1. Soit $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

a) Dessiner le domaine D dans le plan et déterminer $D(x, \cdot)$ et $D(\cdot, y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
b) Montrer que D est borélien.
c) Calculer l'aire de D et $\int_D (x^2 + y^2)\, dxdy$.

Exercice 2. Calculer l'aire d'un disque.

Exercice 3. Calculer $\int_{[0,1]^2} xe^{xy}\, dxdy$.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$, nous considérons :

(i) La demi-boule fermée $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
(ii) Le cône plein $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, 0 \leq z \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq z^2\}$.
(iii) Le cylindre plein $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, 0 \leq z \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

En examinant les aires des coupes des ces trois solides à la hauteur z, retrouver l'*identité d'Archimède* :

$$\mathrm{vol}(C) = \mathrm{vol}(D) + \mathrm{vol}(K),$$

« vol » désignant le volume d'un solide.

Vérifier cette identité à l'aide de formules connues.

Exercice 5. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$, soit $f(x, y) := y^x$. Soient a et b tels que $-1 < a < b$.

a) Montrer que f est Lebesgue intégrable sur $[a, b] \times [0, 1]$.
b) Trouver la valeur de l'intégrale $I := \displaystyle\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln y}\, dy$.

Exercice 6. Soient X, Y a. p. d., et μ, respectivement ν, la mesure de comptage sur X, respectivement Y.

a) Montrer que $\mathscr{P}(X) \otimes \mathscr{P}(Y) = \mathscr{P}(X \times Y)$.
b) Montrer que $\mu \otimes \nu$ est la mesure de comptage sur $X \times Y$.

Exercice 7. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) $\mathscr{M} \otimes \mathscr{S} = \{A \times B \,;\, A \in \mathscr{M}, B \in \mathscr{S}\}$.
b) $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.
c) $\mathscr{L}_n \otimes \mathscr{L}_m = \mathscr{L}_{n+m}$.
d) $\nu_n \otimes \nu_m = \nu_{n+m}$.
e) $\lambda_n \otimes \lambda_m = \lambda_{n+m}$.
f) Soient $(X, \mathscr{M}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{S}, \nu)$ des espaces mesurés, avec μ et ν σ-finies. Soit $E \in \mathscr{M} \otimes \mathscr{S}$. Si $\nu(E_x) = 0$ pour (presque) tout $x \in X$, alors $\mu \otimes \nu(E) = 0$.
g) Si μ et ν sont des mesures σ-finies, alors $\mu \otimes \nu$ est σ-finie.

Exercice 8. Pour $y > 0$, soit $f_y(x, t) := \dfrac{1}{(1 + x^2t^2)(1 + y^2t^2)}$, avec $x, t \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que f_y est Lebesgue intégrable sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$.
b) Soit $g(y, t) := \int_0^1 f_y(x, t)\, dx$. Montrer que g est Lebesgue intégrable sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$.

c) Trouver la valeur de l'intégrale $I := \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$.

Exercice 9. Soit μ la mesure de comptage sur $([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]})$.

a) Soit $\Delta := \{(x,x)\,;\, x \in [0,1]\}$. Δ est-il un borélien de $\mathbb{R}^2$? De $[0,1]^2$?

b) Justifier l'existence des intégrales itérées suivantes, et les calculer.

$$I_1 := \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_\Delta(x,y)\, d\lambda(x) \right) d\mu(y),$$
$$I_2 := \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_\Delta(x,y)\, d\mu(y) \right) d\lambda(x).$$

c) Quelle hypothèse d'un théorème important n'est pas satisfaite ?

Exercice 10. Pour $(x,y) \in [-1,1]^2$, soit

$$f(x,y) := \begin{cases} (xy)/(x^2+y^2)^2, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Montrer que les intégrales itérées de f existent et sont égales.

b) La fonction f est-elle Lebesgue intégrable sur $[-1,1]^2$?