Fiche 11
Mesures produit.

Exercice 1. a) Montrer que l'intégrale généralisée $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ existe et que $I = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$.

b) Calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}.$$

En déduire que $I = \pi^2/4$.

c) Déduire des questions précédentes et d'un développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2. En calculant de deux façons différentes l'intégrale

$$I := \int_0^\infty \left(\int_0^1 e^{-x} \sin(2xy)\,dy \right) dx,$$

déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$.

Exercice 3. (Transformée de Fourier d'une mesure) Soit μ une mesure borélienne finie dans $\mathbb{R}$. La *transformée de Fourier de la mesure* μ est définie par

$$\varphi(x) := \int_{\mathbb{R}} \exp(-ixt)\,d\mu(t),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(En théorie des probabilités, on travaille plutôt avec la *fonction caractéristique de* μ, définie par

$$\psi(x) := \varphi(-x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(ixt)\,d\mu(t),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.)$$

a) Calculer φ dans les cas particuliers suivants : (i) $\mu = \delta_0$; (ii) $\mu(A) = \lambda(A \cap [0,1])$, $\forall\, A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$; (iii) μ est la mesure de densité e^{-t^2}.

b) Montrer que la fonction φ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

c) Soient $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} \exp(iax)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} K_n(t-a)\,d\mu(t),$$

où K_n est une fonction que l'on explicitera.

d) Déterminer $\displaystyle\lim_n \frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} \exp(iax)\,\varphi(x)\,dx$.

e) En déduire que, si $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} \varphi(x) = 0$, alors μ est une mesure diffuse.

f) Même conclusion si φ est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. a) Énoncer les hypothèses et les conclusions des théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini pour la mesure de comptage sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

b) Soit

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ f(n,m) := \begin{cases} 1, & \text{si } n = m-1 \\ -1, & \text{si } n = m+1 \\ 0, & \text{si } n \neq m \pm 1 \end{cases}.$$

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} f(n,m)$ et $\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f(n,m)$, et vérifier si les conditions du point précédent sont satisfaites.

Exercice 5. Soit μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, ν une mesure σ-finie sur X, et soient $f_n : X \to \mathbb{R}$ des fonction mesurables, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Soit $f(n,x) := f_n(x)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in X$.

a) Quelles hypothèses supplémentaires doit-on ajouter pour pouvoir appliquer le théorème de Fubini-Tonelli à $\mu \otimes \nu$ et à f_n, et quelle est l'identité obtenue ?
b) Quelles hypothèses supplémentaires doit-on ajouter pour appliquer le théorème de Fubini à $\mu \otimes \nu$ et à f_n, et quelle est l'identité obtenue ?

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère deux cylindres (pleins) circulaires droits infinis de rayon 1. Si les axes des cylindres sont concourants et orthogonaux, calculer le volume de leur intersection.

Exercice 7. Soient μ_1, μ_2 deux mesures boréliennes, σ-finies, non nulles, sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\mu_1 \otimes \mu_2(\mathbb{R}^2 \backslash \Delta) = 0, \text{ où } \Delta := \{(x,x)\,;\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b_1, b_2 \in]0, \infty[$ tels que $\mu_1 = b_1\, \delta_a$ et $\mu_2 = b_2\, \delta_a$. (Et réciproquement.)

a) Montrer que si $A_1, A_2 \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ sont tels que $\mu_1(A_1) > 0$ et $\mu_2(A_2) > 0$, alors $\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) > 0$.
b) Avec A_1, A_2 comme ci-dessus, en déduire que $(A_1 \times A_2) \cap \Delta \neq \varnothing$, puis que $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$.
c) Soit $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ tel que $\mu_1(A) > 0$. En utilisant les questions précédentes, montrer que $\mu_2(\mathbb{R}\backslash A) = 0$, puis que $\mu_2(A) > 0$, et enfin que $\mu_1(\mathbb{R}\backslash A) = 0$.
d) Conclure en utilisant l'exercice 9 de la fiche 5.

Exercice 8. Soient μ, ν deux probabilités sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. Soient

$$F_\mu(t) := \mu(]t, \infty[),\ G_\mu(t) := \mu(]-\infty, t]),\ H_\mu(t) := \mu(\{t\}),\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

On définit de manière analogue F_ν, G_ν et H_ν.

a) Montrer que les fonctions F_μ, G_μ et H_μ sont boréliennes.
b) Montrer que $\int_{\mathbb{R}} F_\mu\, d\nu = \int_{\mathbb{R}} (G_\nu - H_\nu)\, d\mu$.
c) Soient $D_\mu := \{t \in \mathbb{R}\,;\, H_\mu(t) \neq 0\}$ et $D_\nu := \{t \in \mathbb{R}\,;\, H_\nu(t) \neq 0\}$.
   (i) Expliquer pourquoi les ensembles D_μ et D_ν sont a. p. d.
   (ii) Montrer l'égalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} F_\mu\, d\nu + \int_{\mathbb{R}} F_\nu\, d\mu + \sum_{t \in D_\mu \cap D_\nu} H_\mu(t)\, H_\nu(t) = 1.$$

Exercice 9. Soit μ une mesure borélienne finie dans $\mathbb{R}$. Soit

$$H_\mu(x,y) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{y^2 + (x-t)^2}\, d\mu(t),\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y > 0.$$

Le but de cet exercice est de montrer que si $H_\mu = H_\nu$, alors $\mu = \nu$.

a) Montrer que H_μ est continue.
b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{y \searrow 0} y\, H_\mu(x,y)$.
c) Soient $a < b$ deux réels. Déterminer $\lim_{y \searrow 0} \int_a^b H_\mu(x,y)\, dx$.
d) Soit ν une autre mesure borélienne finie dans $\mathbb{R}$. On suppose que $H_\mu = H_\nu$. Montrer que $\mu = \nu$.