

Fiche 5
Mesures
Intégrales

Notations et éléments de cours dont certains sont pour l'instant admis

1. Ici λ désigne la mesure de Borel sur $\mathbb{R}$. Cette mesure est définie sur tous les boréliens de $\mathbb{R}$ et pour tous réels $a < b$, $\lambda([a, b]) = \lambda(]a, b]) = b - a$.
2. Pour une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f est Riemann et Lebesgue intégrable et l'intégrale de Lebesgue de f coïncide avec l'intégrale de Riemann :

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x) dx.$$

3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un segment et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue ($f \geq 0$). Alors f est Lebesgue intégrable sur I si et seulement si l'intégrale de Riemann généralisée de f est convergente. De plus, nous avons l'égalité des intégrales (finies ou infinies). Par exemple, dans le cas où $I =]0, +\infty[$,

$$\int_{]0, +\infty[} f d\lambda = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

Exercice 1. (Mesure image) Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction mesurable. Soit μ une mesure sur $\mathcal{M}$. Nous définissons $f_*\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ par $f_*\mu(A) := \mu(f^{-1}(A))$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Rappelons que $f_*\mu$ est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. C'est la *mesure image* de μ par f .

- a) Déterminer $f_*\delta_a$, avec $a \in X$.
- b) Soit μ une probabilité sur X (donc $\mu(X) = 1$). Si $B \in \mathcal{M}$, déterminer $(\chi_B)_*\mu$.

Exercice 2. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(U) = 0$ si et seulement si $U = \emptyset$.

Exercice 3. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

- a) Si $A \subset \mathbb{R}$ est borélien et si $\lambda(A) > 0$, alors il existe un ouvert non vide $U \subset \mathbb{R}$ tel que $U \subset A$.
Et réciproquement?
- b) Si $A \subset \mathbb{R}$ est borélien et si $\lambda(A) < +\infty$, alors A est borné.

Exercice 4. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

- a) Une partie d'un ensemble négligeable est négligeable.
- b) Une union a. p. d. d'ensembles négligeables est négligeable.
- c) Une union d'ensembles négligeables est négligeable.

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

- a) Si $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ est mesurable et satisfait $\mu(f^{-1}(+\infty)) = 0$, alors f est intégrable.
- b) Si $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ est mesurable et satisfait $\int f d\mu = 0$, alors $f = 0$.
- c) Le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

Exercice 6. Dans cet exercice, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Borel.

- a) Soit $I :=]0, 1[$. Soit $0 < \alpha < +\infty$. À quelle condition la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est-elle intégrable sur I ?
b) Même question avec $I := [1, +\infty[$ et $I :=]0, +\infty[$.

Exercice 7. a) On considère la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Montrer que $f \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ et calculer son intégrale.

- b) Mêmes questions pour la fonction $f : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} \sin x, & \text{si } \cos x \in \mathbb{Q} \\ \sin^2 x, & \text{si } \cos x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Exercice 8. Soit $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ tel que $\lambda(B) > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un borélien $A \subset B$ tel que $0 < \lambda(A) < \varepsilon$. Indication : recouvrir B avec des intervalles disjoints de taille $< \varepsilon$.

Exercice 9. a) Soit μ une mesure borélienne de probabilité sur $[0, 1]$, avec la propriété suivante :

$$\mu(B) > 0 \implies \mu([0, 1] \setminus B) = 0, \forall B \in \mathcal{B}_{[0, 1]}.$$

- (i) Construire une suite d'intervalles fermés $(I_j)_{j \geq 0} \subset [0, 1]$ avec les propriétés suivantes : $I_0 = [0, 1]$, $I_{j+1} \subset I_j$, $\forall j \geq 0$, I_j est de longueur 2^{-j} , $\forall j \geq 0$, et $\mu(I_j) = 1$, $\forall j \geq 0$.
(ii) En déduire qu'il existe un point $a \in [0, 1]$ tel que $\mu = \delta_a$.

- b) Soit ν une mesure borélienne σ -finie sur $\mathbb{R}$ avec la propriété suivante :

$$\nu(B) > 0 \implies \nu(\mathbb{R} \setminus B) = 0, \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in [0, +\infty[$ tels que $\nu = b \delta_a$.

Exercice 10. Soit λ_1 la mesure complétée de λ .

- a) Soient f et g deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f = g \lambda_1 - \text{p. p.} \iff f = g$.

De même pour $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, avec $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que $A \subset \overline{\overset{\circ}{A}}$.

- b) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Nous considérons les deux propriétés suivantes.

(P1) f est continue λ_1 -p. p.

(P2) Il existe une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f = g \lambda_1$ -p. p.

Montrer que (P1) n'implique pas (P2), et que (P2) n'implique pas (P1).

- c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un ouvert U dense dans $\mathbb{R}$ tel que $\lambda_1(U) \leq \varepsilon$.

Exercice 11. Pour des fonctions f, g définies sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{R}^n$, la relation $f \sim g$ si et seulement si $f = g \mu$ -p. p. est une équivalence.