

Fiche 7
Convergence monotone et dominée.

Exercice 1. Soit f une fonction Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Calculer

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \frac{x}{x+n} d\lambda(x).$$

Exercice 2. Calculer

$$\lim_n \int_0^\infty \frac{(\sin x)^n}{x^2} dx.$$

Exercice 3. Rappelons que

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \nearrow e^x, \forall x \geq 0.$$

Nous considérons, pour tout $n \geq 2$, la fonction $f_n :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := \frac{1}{x^{1/n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}, \forall x > 0.$$

- a) Démontrer que, pour $n \geq 2$ et $x \geq 1$, nous avons $f_n(x) \leq 4/x^2$.
- b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, f_n est Lebesgue intégrable sur $]0, \infty[$.
- c) Calculer $\lim_n \int_0^\infty f_n(x) dx$.

Exercice 4. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x , soit $f_n(x) := e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

- a) Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est une série convergente pour tout $x > 0$, et calculer sa somme $f(x)$.
- b) Comparer $\int_0^\infty \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) dx$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\infty f_n(x) dx$. Expliquer.

Exercice 5. a) Montrer que la fonction

$$f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \frac{\sin x}{e^x - 1}, \forall x > 0,$$

est Lebesgue intégrable sur $]0, \infty[$.

- b) Montrer que, pour tout $x > 0$, nous avons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \sin x$.
- c) En déduire que $\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

Exercice 6. Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, montrer que δ_0 n'est pas une mesure à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 7. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit f une fonction mesurable positive sur X . Montrer que

$$\lim_n n \int_X \ln \left(1 + \frac{1}{n} f \right) d\mu = \int_X f d\mu.$$

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue intégrable. Calculer

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-n \sin^2 x) f(x) d\lambda(x).$$

Exercice 9. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ finie. Soit $f : X \rightarrow [0, \infty[$ une fonction mesurable et, pour $n \geq 1$, soit $I_n := \int_X \frac{f^n}{1 + f^n} d\mu$. Calculer $\lim_n I_n$.

Exercice 10. Rappelons que, si $y \geq 0$, alors la suite $\left(\left(1 - \frac{y}{n} \right)^n \right)_{n \geq y}$ est croissante, de limite e^{-y} .

Soit $f_n(x) := n(1-x)^n \sin^2(nx) \chi_{[0,1]}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer la limite simple (notée f) de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$.

b) Calculer, en utilisant le rappel et le théorème de convergence monotone, $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$.

c) Montrer que $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n d\lambda$.

Exercice 11. Nous munissons l'intervalle $[0, 1]$ de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ . Soit $(f_n)_{n \geq 2}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x, & \text{si } 0 \leq x < 1/n \\ -n^2(x - 2/n), & \text{si } 1/n < x \leq 2/n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Tracer le graphe de f_n .

b) Calculer et comparer $\lim_n \int f_n d\lambda$, $\int \lim_n f_n d\lambda$, $\lim_n \int f_n d\lambda$ et $\int \lim_n f_n d\lambda$.

c) Mêmes questions avec la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$ définie par $g_{2p} := \chi_{[0, 1/(2p)]}$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $g_{2p+1} := \chi_{[1/(2p+1), 1]}$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Exercice 12. Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \rightarrow [0, \infty[$ une fonction mesurable.

a) Supposons μ finie. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $X_n := f^{-1}([n, n+1[)$. Montrer que f est μ -intégrable si et

seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} n \mu(X_n) < \infty$.

b) Nous ne supposons plus μ finie. Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit $F_n := f^{-1}([2^n, 2^{n+1}[)$. Montrer que f est μ -

intégrable si et seulement si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n \mu(F_n) < \infty$.

Exercice 13. (Suites croissantes de mesures)

a) Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $(a_{n,k})_{n \geq 0}$ une suite telle que

$$a_{n,k} \geq 0, \forall n, k \geq 0, \tag{H1}$$

$$(a_{n_k})_{k \geq 0} \text{ est croissante, } \forall n \geq 0. \tag{H2}$$

Soit $a_n := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n,k}$, $\forall n \geq 0$.

Montrer que $\lim_k \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n \geq 0} a_n$.

b) Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. Soit $(\mu_k)_{k \geq 0}$ une suite de mesures sur $\mathcal{M}$ telles que :

$$(\mu_k(A))_{k \geq 0} \text{ est croissante, } \forall A \in \mathcal{M}. \quad (\text{H})$$

Pour $A \in \mathcal{M}$, soit $\mu(A) := \lim_k \mu_k(A)$.

- (i) Montrer que μ est une mesure sur $\mathcal{M}$.
- (ii) Montrer que pour toute fonction $\mathcal{M}$ -mesurable $f : X \rightarrow [0, \infty]$, la suite $(\int f d\mu_k)_{k \geq 0}$ est croissante.

On pourra commencer par le cas où f est étagée.

- (iii) Montrer que pour toute fonction $\mathcal{M}$ -mesurable $f : X \rightarrow [0, \infty]$, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f d\mu_k = \int f d\mu.$$

On pourra commencer par le cas où f est étagée.

Exercice 14. En considérant, sur $\mathbb{R}$, les fonctions $f_n(x) := -(x + n)_-$, montrer que l'hypothèse $f_n \geq 0$ est essentielle pour avoir la conclusion du lemme de Fatou.

Exercice 15. Nous munissons $[0, 1]$ de la mesure de Lebesgue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $m = m(n)$ l'unique entier tel que $m^2 \leq n < (m+1)^2$. Soient

$$A_n := \left[\frac{n - m^2}{2m + 1}, \frac{n + 1 - m^2}{2m + 1} \right], \quad f_n := \sqrt{m} \chi_{A_n}.$$

Montrer que :

- a) $\int |f_n| \rightarrow 0$.
- b) Il n'existe pas g intégrable telle que $|f_n| \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- c) Pour tout $x \in [0, 1]$, nous avons $f_n(x) \rightarrow 0$.

En déduire qu'en général la conclusion de la réciproque du théorème de convergence dominée nécessite de passer à une sous-suite.