Fiche 8
Intégrales à paramètre.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue intégrable. Montrer que la *transformée de Fourier de f*, définie par

$$\widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\imath t x} f(x)\, d\lambda(x),\ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (transformée de Laplace)**.** Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Nous posons

$$F(t) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt} f(x)\, \mathrm{d}x,\ \forall\, t > 0\,;$$

c'est la *transformée de Laplace de f*. (La fonction F est plus communément notée $\mathscr{L} f$.)

a) Montrer que F est de classe C^∞ sur $]0, \infty[$ et exprimer pour tout $k \geq 1$ et tout $x > 0$, $F^{(k)}(t)$ sous forme d'une intégrale.
b) Déduire de la question précédente la valeur de $\int_0^\infty x^k\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$, $\forall\, k \geq 1$.

Exercice 3. a) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombre réels (ou complexes). Soient

$$R := \sup\{r \geq 0\,;\ a_n r^n \text{ borné}\}$$

et $I :=]-R, R[$. Posons $F(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\forall\, x \in I$. Montrer que $F \in C^\infty(I)$ et que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in I, \quad F^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

b) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, n\, x^{n-1}$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Exercice 4. Soit $f(t, x) := \dfrac{t-1}{\ln t}\, t^x$ pour $t \in\,]0, 1[$ et $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $F(x) := \int_0^1 f(t, x)\, \mathrm{d}t$ est finie si et seulement si $x > -1$.
b) Montrer que F est de classe C^1 sur $]-1, \infty[$ et calculer F' sur $]-1, \infty[$.
c) Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$. En déduire la valeur de $F(x)$ pour $x > -1$.

Exercice 5. Pour $x \geq 0$, soient

$$F(x) := \left(\int_0^x \exp(-t^2)\, \mathrm{d}t\right)^2 \text{ et } G(x) := \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\, \mathrm{d}t.$$

a) Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
b) Calculer $F'(x) + G'(x)$ pour $x \geq 0$.
c) En déduire la valeur de $I := \int_0^\infty \exp(-t^2)\, \mathrm{d}t$, ainsi que la valeur de $J := \int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2/2)\, \mathrm{d}t$.

Exercice 6 (fonction zêta de Riemann)**.** La *fonction zêta de Riemann* est donnée par la formule

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s},\ \forall\, s > 1.$$

Montrer que $\zeta :]1, \infty[\to \mathbb{R}$ est de classe C^∞.

Exercice 7. Soit $f(x) := \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que f est finie si et seulement si $x > 0$.
b) Montrer que f est continue sur $]0, \infty[$.
c) Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x \searrow 0} x\, f(x)$.

Exercice 8. a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. Notons K sa somme.

b) Pour $x \in]-1, 1[$, posons $f(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1, 1[$ et calculer f'.
c) Déterminer f sur $]-1, 1[$ et $\lim\limits_{x \searrow -1} f(x)$.
d) En déduire la valeur de K.

Exercice 9. Soit $I(\alpha) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, $\alpha \geq 0$.

a) Montrer que la fonction $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) Donner une expression de $I'(\alpha)$ si $\alpha > 0$.
c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. Décomposer la fraction $\dfrac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples. En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.
d) Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geq 0$.

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) := \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) Calculer f'' et les limites à l'infini de f et f'.
c) En déduire une expression simple de f.

Exercice 11. Soit P une probabilité sur $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+})$.

a) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto \cos(xt)$ est P-intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soit

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}_+} \cos(xt)\,\mathrm{d}P(x),\ \forall\, t \geq 0.$$

b) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
c) Nous supposons que l'application $x \mapsto x^2$ est P-intégrable. Déterminer $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1-F(t)}{t^2}$.
(On pourra établir et utiliser l'inégalité $1 - \cos u \leq u^2/2$.)
d) « Réciproquement », supposons $\liminf\limits_{t \to 0} \dfrac{1-F(t)}{t^2} < \infty$. Montrer que l'application $x \mapsto x^2$ est P-intégrable. (On pourra utiliser le lemme de Fatou.)