Transformation de Fourier 1. Classe de Schwartz

Références bibliographiques :
- Analyse réelle et complexe, W. Rudin.
- Distributions et équations aux dérivées partielles. C. Zuily.

Partie I. Rappels de cours

1 Transformation de Fourier pour les fonctions

Définition. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On définit la transformée de Fourier de f par*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\,dx \qquad (*)$$

où $x\cdot\xi$ désigne le produit scalaire habituel de $\mathbb{R}^n$: $x\cdot\xi = \sum_{j=1}^{n} x_j\xi_j$. On note $\mathscr{F}$ la transformation de Fourier en tant qu'application, c'est-à-dire que $\mathscr{F}(f) = \widehat{f}$.

Voici un premier résultat sur la transformée de Fourier.

Théorème (Riemann-Lebesgue)**.** *Si $f \in L^1$ alors $\widehat{f}$ est une fonction uniformément continue, bornée et nulle à l'infini.*

Un exemple très important de calcul explicite de transformée de Fourier celui de la gaussienne :

$$\mathscr{F}(e^{-a|x|^2}) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}.$$

Ici, a est un nombre complexe de partie réelle positive et $\sqrt{a}$ désigne la racine de partie réelle positive.

La transformation de Fourier est inversible. Plus précisément :

Théorème. *Si $f, \widehat{f} \in L^1$ alors*

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi.$$

Sur L^2, la transformée de Fourier est une isométrie à une constante près.

Théorème (Plancherel)**.** *Si $f \in L^2$ alors $\widehat{f} \in L^2$ et $\|\widehat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\|f\|_{L^2}$. De plus, $\widehat{\widehat{f}}(x) = (2\pi)^n f(-x)$.*

Lorsque $f \in L^2$ la formule $(*)$ n'a pas de sens. Ici $\widehat{f}$ se définit par densité de $L^1 \cap L^2$ dans L^2 en posant $\widehat{f} = \lim_{k\to\infty} \widehat{f_k}$ où $f_k \in L^1 \cap L^2$ tend vers f dans L^2.

2 Classe de Schwartz (fonctions à décroissance rapide)

On appelle multi-indice un élément $\alpha \in \mathbb{N}^n$. On définit $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} = \left(\frac{\partial}{\partial_{x_1}}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial_{x_n}}\right)^{\alpha_n}$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$

Définition. *On appelle espace de fonctions à décroissance rapide ou encore classe de Schwartz l'ensemble*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \textit{ tel que } x^\alpha \partial^\beta f \textit{ soit bornée sur } \mathbb{R}^n\ \forall \alpha, \beta \textit{ multi-indices}\}.$$

La classe de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel métrique complet (espace de Fréchet) avec comme distance

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$$

où

$$p_n(f) = \sup_{x, |\alpha| \leq n} (1+|x|)^n |\partial^\alpha f(x)|$$

La convergence dans la classe de Schwartz équivaut à la convergence uniforme de tous les $x^\alpha \partial^\beta f$.

La classe de Schwartz est stable par multiplication par des fonctions dites à croissance lente :

$$\mathscr{L}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } \forall \alpha\, \exists m \in \mathbb{N}, C > 0, |\partial^\alpha f(x)| \leq C(1+|x|^m)\}$$

La transformation de Fourier est une bijection de la classe de Schwartz :

Théorème. *$\mathscr{F}$ est un isomorphisme topologique et algébrique de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{S}$ d'inverse*

$$\mathscr{F}^{-1}(f)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} f(\xi)\, d\xi$$

Voici maintenant quelques propriétés de la transformation de Fourier et de la classe de Schwartz :

Proposition. *a) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. Alors l'application $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto f\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est linéaire et continue sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

b) Si $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ et on a la continuité de l'application bilinéaire $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \ni (f,g) \mapsto f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

c) $\widehat{x^\alpha f} = (i\partial_\xi)^\alpha \widehat{f}$

d) $\widehat{\partial^\alpha f} = (i\xi)^\alpha \widehat{f}$

e) Soient φ et ψ deux fonctions à décroissance rapide. Alors

i) $\int \widehat{\varphi}\psi = \int \varphi\widehat{\psi}$

ii) $\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2} = \int \varphi\overline{\psi} = (2\pi)^{-n} \int \widehat{\varphi}\overline{\widehat{\psi}} = (2\pi)^{-n} \langle \widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \rangle_{L^2}$ *(Parseval)*

iii) $\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi}\widehat{\psi}$

iv) $\widehat{\varphi\psi} = (2\pi)^{-n} \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$

Enfin, il y a un lien fort entre le support d'une fonction et la croissance à l'infini de la transformée de Fourier. Ce lien est mis en évidence dans les théorèmes de Paley-Wiener dont voici un exemple.

Théorème (Paley-Wiener)**.** *On a l'équivalence entre*

a) f une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\overline{B(0,R)}$;

b) La transformée de Fourier de f se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ qui vérifie que

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \exists C \geq 0\ \forall \xi \in \mathbb{C}^n \quad |\widehat{f}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-N} e^{R|\mathrm{Im}\,\xi|}.$$

Partie II. Exercices

Exercice 1. (Calculs) Soit $a > 0$.

a) Calculer les transformées de Fourier de $\mathbb{1}_{[-a,a]}$ et $\dfrac{\sin ax}{x}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $f_a(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{x^2+a^2}$. Montrer que $f_a \in L^1(\mathbb{R})$ et calculer $\widehat{f_a}$. En utilisant le résultat, montrer que $f_a * f_b = f_{a+b}$. En déduire que $\widehat{e^{-a|x|}} = \frac{2a}{\xi^2+a^2}$.

c) Comment calculer la transformée de Fourier d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ où $\deg Q - \deg P \geq 2$ et Q est sans racines réelles ?

Exercice 2. (Transformée de Fourier de la Gaussienne) Soit $a \in \mathbb{C}$ de partie réelle strictement positive. On pose $f(x) = e^{-a|x|^2}$ où $x \in \mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de calculer la transformée de Fourier de f.

a) Montrer qu'on peut se ramener au cas $n = 1$.

On suppose dorénavant que $n = 1$.

b) Trouver une EDO vérifiée par f.

c) En appliquant la transformée de Fourier à cette ODE, calculer $\widehat{f}$ en fonction de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$.

d) En appliquant le théorème intégral de Cauchy calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$ et conclure.

Exercice 3. (Inversion de la transformation de Fourier).

a) Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)g(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\,dx. \tag{$**$}$$

b) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction continue et bornée telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Soit $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ une fonction à décroissance rapide, $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbb{R}^n$. En utilisant $(**)$ avec $g(\xi) = h(\varepsilon\xi)e^{\mathrm{i}\xi\cdot a}$ et en faisant $\varepsilon \to 0$ montrer que
$$h(0)\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{\mathrm{i}\xi\cdot a}\,d\xi = f(a)\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{h}(x)\,dx.$$

c) En choisissant h convenablement conclure que
$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{\mathrm{i}\xi\cdot a}\,d\xi = (2\pi)^n f(a).$$

d) En convolant avec une approximation de l'identité montrer qu'on peut se passer de l'hypothèse f continue et bornée.

Exercice 4. Montrer l'identité de Parseval
$$\forall f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} f\,\overline{g} = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\,\overline{\widehat{g}}$$
et en déduire le théorème de Plancherel (utiliser la densité de $\mathscr{S}$ dans L^2).

Exercice 5. Si $f \in \mathscr{S}$, $|h| = 1$ alors
$$\frac{f(x+\varepsilon h) - f(x)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \partial_h f(x) = h\cdot\nabla f(x)$$
dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 6. Lesquelles des fonctions suivantes appartiennent à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$?

a) $e^{-(x_1+x_2^2+\cdots+x_n^n)}$

b) $|x|^n e^{-\frac{|x|^2}{n^2}}$

c) $\frac{1}{(1+|x|^2)^{2n}}$

d) $\frac{\sin e^{-|x|^2}}{1+|x|^2}$

e) $\frac{\cos e^{-|x|^2}}{(1+|x|^2)^n}$

f) $e^{-|x|^2}\sin e^{x_1^2}$

g) $e^{-a|x|^2}\sin e^{x_1^2}$, $a>0$

h) $\int e^{i\langle x,y\rangle}\frac{\sin e^{-|y|^2}}{1+|y|^2}\,\mathrm{d}y$

Exercice 7. Calculer les transformées de Fourier des applications $P(x)e^{-a|x|^2}$ et $e^{-a|x|^2}\sin\langle x,x_0\rangle$, où P est un polynôme, $a>0$, $x_0\in\mathbb{R}^n$.

Exercice 8. Une fonction de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ admet-elle toujours une primitive dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$? Si non, donner une CNS pour qu'il existe une primitive dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 9. Le but de cet exercice est de montrer un théorème de Paley-Wiener qui relie les propriétés du support d'une fonction aux propriétés de décroissance de sa transformée de Fourier.

a) Soit $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction de classe C^∞ à support dans l'intervalle $[-M,M]$. Montrer que $\widehat{f}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \exists C=C(n)>0\quad \text{tel que}\quad |z^n\widehat{f}(z)|\le Ce^{M|\operatorname{Im} z|}\quad \forall z\in\mathbb{C}. \tag{$***$}$$

b) Réciproquement, soit g une fonction entière qui vérifie $(***)$.

i) Montrer que $g\big|_{\mathbb{R}}$ admet une transformée de Fourier inverse notée f.

ii) Majorer $\mathscr{F}(f^{(k)})$ et en déduire que $f\in C^\infty(\mathbb{R})$.

iii) Montrer que pour tout $a\in\mathbb{R}$ l'application $x\mapsto g(x+ia)$ est intégrable et que

$$f(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{i\xi(x+ia)}g(x+ia)\,dx.$$

iv) En prenant a de même signe que ξ montrer l'inégalité

$$|f(\xi)|\le C_1e^{(M-|\xi|)|a|}$$

pour une certaine constante C_1.

v) Conclure que f est à support dans l'intervalle $[-M,M]$.