Cohomologie équivariante et application moment

exposé de Lucas Fresse

1 juillet 2008

1 Introduction

1.1 Algèbre de cohomologie d'une variété

À une variété (différentielle), on fait correspondre son algèbre de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Q}$, notée $H^*(X, \mathbb{Q})$ ou plus simplement $H^*(X)$. C'est une algèbre graduée. Si $f : X \to Y$ est un morphisme de variétés, on lui associe $H^*(f) : H^*(Y) \to H^*(X)$. On définit ainsi un foncteur contravariant.

Exemples.
a) Si $X = \{x_0\}$ est un point, alors $H^*(\{x_0\}) = \mathbb{Q}$ est concentré en degré 0.

b) Plus généralement, si X est contractile, alors $H^*(X) = \mathbb{Q}$. En effet la cohomologie ne dépend pas du type d'homotopie. Deux applications continues homotopes f et g définissent une même application $H^*(f) = H^*(g)$.

c) On dit que X est acyclique si $H^*(X) = \mathbb{Q}$.

d) Si $X = S^n$ est la sphère, alors $H^*(S^n) = \mathbb{Q}[t^n]/(t^{2n})$.

e) Si $X = \mathbb{CP}^n$ est l'espace projectif complexe, alors $H^*(X) = \mathbb{Q}[t^2]/(t^{2n+2})$.

Notre but est de déterminer l'algèbre de cohomologie de la variété drapeau.

1.2 Variété drapeau

On note $V = \mathbb{C}^n$. Un *drapeau* est une suite croissante de sous-espaces

$$D = (V_0 = 0 \subset V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_n = V)$$

avec $\dim V_i = i$ pour tout i. L'ensemble des drapeaux $\mathcal{D}$ est un sous-ensemble fermé dans le produit des variétés grassmanniennes de V, c'est donc une variété projective, appelée *variété drapeau.*

On fixe une base $e_1, ..., e_n$. On note D_1 le drapeau dont $e_1, ..., e_i$ engendrent le i-ème espace. On dit que la base est adaptée au drapeau. Soit $G = GL_n(\mathbb{C})$ le groupe linéaire. Soit $B \subset G$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. Alors D_1 est l'unique point de $\mathcal{D}$ fixé par B et $G \to \mathcal{D}$, $g \mapsto gD_1$ induit un isomorphisme $G/B \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$.

1.2.1 Calcul des nombres de Betti

On peut calculer la cohomologie d'une variété compacte, en tant qu'espace vectoriel, à l'aide d'une décomposition en cellules.

Proposition 1 *Soit X une variété compacte, et supposons qu'elle admet une filtration fermée:*

$$X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset ... \supset X_r \supset X_{r+1} = \emptyset$$

avec pour tout p: $X_p \setminus X_{p+1} \cong \mathbb{C}^{d_p}$. Alors on a $H^l(X) = 0$ si l est impair et $\dim H^{2l}(X) = \#\{p : d_p = l\}$.

La variété drapeau admet une décomposition en cellules, appelée décomposition de Bruhat. Les cellules sont appelées cellules de Schubert, on les note $C(\sigma)$, elles sont paramétrées par les éléments du groupe symétrique $\sigma \in \Sigma_n$. On peut les construire de la manière suivante. Pour $\sigma \in \Sigma_n$ on note $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma_j})$ la matrice de permutation de σ. Alors G se décompose en $B \times B$-orbites:

$$G = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma_n} BP_\sigma B,$$

on déduit une partition de G/B:

$$G/B = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma_n} (BP_\sigma \bmod B).$$

L'ensemble $C(\sigma) = (BP_\sigma \bmod B)$ est isomorphe à l'espace $\mathbb{C}^{I(\sigma)}$ où $I(\sigma)$ est le nombre d'inversions de σ. Comme les ensembles $C(\sigma)$ sont orbites du groupe B, on peut les organiser selon une filtration fermée.

On déduit:

Proposition 2 *On a* $H^l(\mathcal{D}) = 0$ *pour* l *impair et* $\dim H^{2l}(\mathcal{D}) = \#\{\sigma \in \Sigma : I(\sigma) = l\}$. *De plus* $\dim H^*(\mathcal{D}) = n!$.

Mais cela ne donne pas encore la structure d'algèbre de $H^*(\mathcal{D})$. D'autres outils sont nécessaires.

2 Fibrations

2.1 Définition et quelques exemples

Une *fibration* est une application continue $\pi : E \to B$ qui a la propriété de relèvement d'homotopie: dans un diagramme comme ci-dessous,

$$\begin{array}{ccc} \{0\} \times A & \longrightarrow & E \\ i \downarrow & & \downarrow \pi \\ [0;1] \times A & \longrightarrow & B \end{array}$$

(où i est l'inclusion) il existe une application $[0;1] \times A \to E$ telle que tout commute. On peut observer que, si B est connexe par arcs, alors étant donnés $b_0, b_1 \in B$, on a une équivalence d'homotopie $\pi^{-1}(b_0) \cong \pi^{-1}(b_1)$. En effet on se donne un chemin (γ_t) de b_0 à b_1. Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \{0\} \times \pi^{-1}(b_0) & \xrightarrow{j} & E \\ i \downarrow & & \downarrow \pi \\ [0;1] \times \pi^{-1}(b_0) & \xrightarrow{k} & B \end{array}$$

on note j l'inclusion et k l'application définie par $k(t,e) = \gamma_t$. Le relèvement fournit une application continue $\pi^{-1}(b_0) = \{1\} \times \pi^{-1}(b_0) \to \pi^{-1}(b_1)$. L'inverse s'obtient similairement. On peut donc parler de la fibre d'une fibration. Dans les cas que nous rencontrerons toutes les fibres seront homéomorphes.

Exemples.
a) Un produit $B \times F \to B$ est une fibration de fibre F.
b) Un revêtement est une fibration. En particulier si G est un groupe discret qui opère librement et proprement sur une variété X, alors l'application quotient $X \to X/G$ est une fibration de fibre homéomorphe à G.
c) Si $\pi : E \to B$ est localement un produit (i.e. $B = \bigcup_{i \in I} U_i$ avec $\pi^{-1}(U_i) \cong F \times U_i$) alors π est une fibration.

Il y a des relations entre les algèbres de cohomologie de la base, de l'espace total et de la fibre d'une fibration. On aura besoin des deux propriétés suivantes:

Proposition 3 *(a) Soit $\pi : E \to B$ une fibration de fibre F acyclique. Alors on a $H^*(E) = H^*(B)$.*
(b) Soit G un groupe fini agissant librement sur une variété X. Alors l'application $H^*(X/G) \to H^*(X)$ induit un isomorphisme d'algèbres entre $H^*(X/G)$ et $(H^*(X))^G$, la sous-algèbre de $H^*(X)$ formée des éléments fixes sous l'action de G. De plus on a $\dim H^*(X/G) = \frac{1}{|G|} \dim H^*(X)$.

On établit ces résultats en utilisant la suite spectrale de Leray-Serre.

2.2 Fibrés principaux

2.2.1 Définition

On appelle fibré principal une fibration du type $\pi : X \to X/G$, où G un groupe topologique et X une variété sur laquelle G opère librement et proprement. Alors cette fibration a pour fibre G.

2.2.2 Construction de fibrations

Soit $X \to X/G$ un fibré principal. Soit F une variété sur laquelle G opère à droite. On construit une application de fibre homéomorphe à F de la manière suivante. Le groupe G opère à gauche sur le produit $F \times X$ par $g(f, x) = (g^{-1}f, gx)$. On note $F \times_G X$ le quotient. On compose la projection $F \times_G X \to X$ et le fibré $X \to X/G$. L'application $\pi_F : F \times_G X \to X/G$ obtenue est un fibré de fibre F.

3 Cohomologie équivariante

3.1 Fibré principal universel: construction de Milnor

Théorème 1 *Soit G un groupe compact connexe. Il existe un fibré principal $\pi_G : E_G \to B_G$ localement trivial, tel que E_G est contractile et B_G est simplement connexe.*

Un tel fibré principal sera qualifié d'universel.

Remarque. En fait si on a une fibration d'espace total contractile et de fibre connexe, la base est toujours simplement connexe. En effet on a alors une suite exacte

$$\cdots \to \Pi_n(E) \to \Pi_n(B) \to \Pi_{n-1}(F) \to \cdots$$

Exemples. a) Construisons le fibré principal universel du tore $G := S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. On note S^∞ l'ensemble des suites $(z_i) \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ à support fini avec $\sum_i |z_i|^2 = 1$. C'est la limite inductive des sphères $S^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : ||z|| = 1\}$. On note $\mathbb{CP}^\infty$ le quotient $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \setminus \{0\}/\mathbb{C}^*$. C'est la limite inductive des espaces projectifs $\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbb{C}^\times$. L'application naturelle $S^\infty \to \mathbb{CP}^\infty$ est la limite inductive des applications de Hopf $S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$. C'est un fibré principal pour S^1, localement trivial (on trivialise au dessus de l'ouvert $z_i \neq 0$). Comme S^∞ est la limite inductive des sphères S^{2n+1}, alors toute application $S^m \to S^\infty$ est homotope à une constante, pour tout m, donc S^∞ est contractile. Comme $\mathbb{CP}^\infty$ est la limite inductive des espaces projectifs complexes, qui sont simplement connexes (en effet $\mathbb{CP}^n$ s'obtient par recollement de $\mathbb{CP}^{n-1}$ avec la boule D^{2n}, le long de la sphère S^{2n-1} en utilisant l'application de Hopf $S^{2n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$), alors $\mathbb{CP}^\infty$ est simplement connexe.

b) Pour le tore $(S^1)^l$, le fibré produit $(S^\infty)^l \to (\mathbb{CP}^\infty)^l$ est un fibré principal universel.

c) Soit $\pi_G : E_G \to B_G$ un fibré principal universel pour un groupe compact G. Soit $H \subset G$ un sous-groupe fermé. Alors le quotient $\pi_H : E_G \to E_G/H$ est bien défini, et c'est un fibré principal universel pour le groupe H: il est localement trivial et d'espace total contractile, de plus E_G/H est simplement connexe.

3.2 Cohomologie équivariante

Soit X une variété sur laquelle agit un groupe compact G. Soit $\pi_G : E_G \to B_G$ un fibré principal universel. Alors $X \times_G E_G \to B_G$ est un fibré de fibre X. L'algèbre de cohomologie équivariante de X est l'algèbre

$$H^*_G(X) := H^*(X \times_G E_G).$$

Observons que si $\pi'_G : E'_G \to B'_G$ est un second fibré principal universel, alors $X \times E_G \to X \times_G E_G$ est un fibré principal localement trivial et $(X \times E_G) \times_G$

$E'_G \to X \times_G E_G$ est un fibré localement trivial de fibre E_G contractile, donc $H^*(X \times_G E_G) = H^*((X \times E_G \times E'_G)/G)$. On a de même $H^*(X \times_G E'_G) = H^*((X \times E_G \times E'_G)/G)$. Ainsi la cohomologie équivariante est bien définie.

Exemples.
a) Supposons $X = G$. Alors $G \times_G E_G = E_G$ et comme G est contractile on obtient $H^*_G(G) = \mathbb{Q}$.
b) Supposons $X = \{x_0\}$ un point. Alors

$$H^*_G(\{x_0\}) = H^*(\{x_0\} \times_G E_G) = H^*(E_G/G) = H^*(B_G).$$

Par exemple

$$H^*_{S^1}(\{x_0\}) = H^*(\mathbb{CP}^\infty) = \mathbb{Q}[t^2]$$

(limite inductive de $H^*(\mathbb{CP}^n) = \mathbb{Q}[t^2]/(t^{2n+2})$).

$$H^*_{(S^1)^l}(\{x_0\}) = H^*((\mathbb{CP}^\infty)^l) = (H^*(\mathbb{CP}^\infty))^{\otimes l} = \mathbb{Q}[t_1^2, ..., t_l^2]$$

par le théorème de Künneth.
c) Supposons $X = G/H$ où H est un sous-groupe fermé. Alors

$$H^*_G(G/H) = H^*(G/H \times_G E_G) = H^*(E_G/H) = H^*_H(\{x_0\}).$$

En effet E_G/H est la base du fibré principal universel associé au groupe H, d'où la dernière égalité.

4 Cohomologie de la variété drapeau

La décomposition d'Iwasawa permet de réaliser la variété drapeau $\mathcal{D}$ comme quotient d'un groupe compact: on note $K = U_n(\mathbb{C})$ et $T \cong (S^1)^n$ l'ensemble des éléments diagonaux de K. On a ainsi $K \cap B = T$. De plus le morphisme $K \to G/B$ induit un isomorphisme $K/T \xrightarrow{\sim} G/B \cong \mathcal{D}$.

4.1 Cohomologie K-équivariante de la variété drapeau

La cohomologie K-équivariante de la variété drapeau se calcule simplement, d'après le point (c) de l'exemple du paragraphe précédent:

$$H^*_K(\mathcal{D}) = H^*_K(K/T) = H^*_T(\{x_0\}) = \mathbb{Q}[t_1^2, ..., t_n^2].$$

4.2 Lien entre la cohomologie K-équivariante de la variété drapeau et sa cohomologie ordinaire

Revenons au cas d'une variété X sur laquelle opère un groupe compact G. L'application

$$\pi : X \times_G E_G \to B_G$$

est un fibré de fibre X. Il induit un morphisme d'algèbres

$$H^*(\pi) : H^*(B_G) = H_G^*(\{x_0\}) \to H^*(X \times_G E_G) = H_G^*(X).$$

En composant π par l'inclusion d'une fibre dans $X \times_G E_G$, on obtient une application constante. Elle induit en cohomologie un morphisme d'algèbres:

$$\rho : H_G^*(X)/(H_G^+(\{x_0\})) \to H^*(X)$$

où $(H_G^+(\{x_0\})) \subset H_G^*(X)$ est l'idéal homogène engendré par les images par $H^*(\pi)$ des éléments de $H_G^*(\{x_0\})$ de degré non-nul. En général ρ n'est pas un isomorphisme. (Par exemple si $G = S^1$ et $X = G$ avec action par multiplication). On utilise ce résultat dû à Kirwan (proposition 5.8 du livre référencé plus bas):

Proposition 4 *Supposons que X a une structure G-symplectique avec application moment $\mu : X \to \mathrm{Lie}(G)^*$. Alors ρ est un isomorphisme d'algèbres.*

La variété $\mathcal{D} = K/T$ a une structure K-symplectique. Pour cela on réalise K/T comme l'orbite coadjointe d'un élément régulier de $\mathrm{Lie}(G)^*$. L'application moment est alors l'inclusion $K/T \hookrightarrow \mathrm{Lie}(G)^*$. On peut donc appliquer le résultat précédent au calcul de la variété drapeau. On obtient:

$$H^*(\mathcal{D}) = H_K^*(\mathcal{D})/(H_K^+(\{x_0\})).$$

4.3 Calcul de la cohomologie équivariante de la variété drapeau

Dans la formule précédente, il reste à déterminer le terme $(H_K^+(\{x_0\}))$. Calculons la cohomologie K-équivariante du point.

Notons $N = N_K(T)$ le normalisateur de T dans K. Pour $\sigma \in \Sigma_n$, notons $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma_j})$ la matrice symétrique associée. Alors N est le produit semi-direct de T et du sous-groupe $\{P_\sigma : \sigma \in \Sigma_n\} = \Sigma_n$. On a donc $N/T \cong \Sigma_n$. L'application naturelle

$$K/T \to K/N = (K/T)/(N/T)$$

est un revêtement de groupe Σ_n. Il suit:

$$H^*(K/N) = H^*(K/T)^{\Sigma_n} \quad \text{et} \quad \dim H^*(K/N) = \frac{1}{n!} \dim H^*(K/T) = 1.$$

Il résulte $H^*(K/N) = \mathbb{Q}$, donc K/N est acyclique. L'application

$$E_K/T \to E_K/N = K/N \times_K E_K \to E_K/K = B_K$$

est la composition d'un revêtement de groupe Σ_n et d'une fibration de fibre K/N acyclique. Il suit

$$H_K^*(\{x_0\}) = H_N^*(\{x_0\}) = H_T^*(\{x_0\})^{\Sigma_n} = \mathbb{Q}[t_1^2, ..., t_n^2]^{\Sigma_n}.$$

Le calcul est achevé et on déduit l'algèbre de cohomologie de la variété drapeau:

$$H^*(\mathcal{D}) = \mathbb{Q}[t_1^2, ..., t_n^2]/I$$

où $I \subset \mathbb{Q}[t_1^2, ..., t_n^2]$ est l'idéal homogène formé par les polynômes symétriques sans terme constant.

Références bibliographiques

Voici les références que j'ai consultées, pour préparer cet exposé:

M. Brion, *Equivariant cohomology and equivariant intersection theory*, Representation theories and algebraic geometry (Montreal, PQ, 1997), 1–37, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

D. Husemoller, *Fibre bundles*, Graduate Texts in Mathematics 20, Springer-Verlag, 1994.

F.C. Kirwan, *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Princeton University Press, 1984.

J. MacCleary, *A user's guide to spectral sequences*, Cambridge University Press, 2001.

E. Spanier, *Algebraic topology*, Springer-Verlag, 1981.