Exposé 1

1 Groupes réductifs

Soit G un *groupe algébrique linéaire sur* $\mathbb{C}$ (*i.e.* pour un certain $n > 0$, un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ défini par des équations polynomiales en les coordonnées $(g_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$).

On dit que G est *réductif* si G ne contient pas de sous-groupe distingué, fermé pour la topologie de Zariski isomorphe à $\mathbb{G}_a$ (le groupe additif $(\mathbb{C},+)$).
Exemples : $(\mathbb{C}^*)^n$ et les groupes classiques $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}), \mathrm{SO}_n(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et plus génralement tout sous-groupe fermé (au sens de Zariski) de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui agit irréductiblement sur $\mathbb{C}^n$.

Voici deux autres caractérisations des groupes réductifs sur $\mathbb{C}$:

Théorème 1.1 ([Br-Mon, §2.2]) *Pour un groupe algébrique linéaire sur* $\mathbb{C}$*, sont équivalentes :*

G réductif ;

$\Leftrightarrow$ G contient un sous-groupe compact (pour la topologie usuelle) dense pour la topologie de Zariski ;

$\Leftrightarrow$ G est le complexifié d'un groupe de Lie compact (i.e. *il existe un sous-groupe compact de G tel que $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Lie}(K) \simeq \mathrm{Lie}(G)$;*

$\Leftrightarrow$ toute représentation rationnelle de G est semi-simple.

Rappel : Une représentation rationnelle V de G est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel V muni d'une action linaire du groupe G telle que $G \to \mathrm{GL}(V)$ soit un morphisme de groupes algébriques. Une telle représentation est semi-simple si $V = \oplus_i V_i$ où les V_i sont des sous-représentations de V irréductibles (*i.e.* sans autre sous-espaces $G-$stables que 0 et V_i).
Conséquence : *Opérateur de Reynolds* :

Proposition 1.2 *Pour toute représentation rationnelle V de G il existe une unique projection $G-$équivariante :*

$$p : V \to V^G$$

sur les vecteurs $G-$invariants de V.

C'est la *projection de Reynolds* que l'on notera p_V.
Démonstration : Démontrons l'unicité. Soient $p, p' : V \to V^G$ deux projections $G-$équivariantes. Soit $\ker p = \bigoplus_i V_i$ une décomposition de $\ker p$ en somme directe de sous-$G-$modules irréductibles. Pour tout i, $V_i \cap V^G = 0$. Fixons i. Soit $0 \neq v \in V_i$. Il existe $g \in G$ tel que $g.v_i \neq v_i$. Donc :

$$0 \neq g.v_i - v_i \in V_i \cap \ker p' \ .$$

Comme V_i est irréductible, forcément $\ker p' \cap V_i = V_i$. D'où $V_i \subseteq \ker p'$ pour tout i. Donc $\ker p \subseteq \ker p'$. De même, $\ker p' \subseteq \ker p$. Donc $\ker p = \ker p'$ et $p' = p$.

Q.e.d.

Remarque : En raison de l'unicité, si $W \subseteq V$ sont deux représentations rationnelles de G, on a : $p_W = p_V|_W$.

Corollaire 1.2.1 *Soit X une variété algébrique affine sur $\mathbb{C}$ munie d'une action algébrique d'un groupe réductif G. ALors si Z_1 et Z_2 sont des sous-variétés fermes de X, disjointes et $G-$stables, il existe $f \in \mathbb{C}[X]^G$ une fonction $G-$invariante régulière sur X telle que :*

$$f|_{Z_1} = 0 \text{ et } f|_{Z_2} = 1 \ .$$

Démonstration : Soient I_{Z_1}, I_{Z_2} les idéaux d'annulation de Z_1 et Z_2 dans $\mathbb{C}[X]$. On a $I_{Z_1} + I_{Z_2} = (1)$. Donc il existe f_1, f_2 respectivement dans I_{Z_1} et I_{Z_2} tels que $f_1 + f_2 = 1$. Il suffit de poser $f := p(f_1)$ où p est la projection de Reynolds de $\mathbb{C}[X]$ sur $\mathbb{C}[X]^G$. **Q.e.d.**

2 Points (semi-)stables

Soit G un sous-groupe réductif fermé et connexe de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$. Soit X une sous-variété irréductible fermée (*i.e.* définie par des équations polynomiales) de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ stable sous G.

En général, G a des orbites qui ne sont pas fermées dans X et donc il est impossible de munir l'ensemble des orbites de X d'une structure de variété algébrique de sorte que l'application $x \mapsto G.x$ soit un morphisme de variétés algébriques. Au lieu de cela, on va définir un ouvert $G-$stable de X et une relation d'équivalence sur cet ouvert (très proche de la relation « être sur la même orbite ») de sorte que le quotient soit une variété projective (éventuellement singulière) et que la surjection canonique sur ce quotient soit un morphisme de variétés.

Définition 1 *Soit $x \in X$. On dit que x est ...*

- **instable** *s'il existe un polynôme homogène $F \in \mathbb{C}[T_0, ..., T_n]$, $G-$invariant, tel que $F(x) = 0$;*
- **semi-stable** *s'il existe un polynôme homogène $F \in \mathbb{C}[T_0, ..., T_n]$, $G-$invariant, tel que $F(x) \neq 0$;*
  On notera X^{ss} l'ensemble des points semi-stables.
- **polystable** *s'il existe un polynôme homogène $F \in \mathbb{C}[T_0, ..., T_n]$, $G-$invariant, tel que $F(x) \neq 0$ et tel que l'orbite $G.x$ est fermée dans l'ouvert affine $X_F := \{y \in X \ : \ F(y) \neq 0\}$;*

– **stable** *si x est polystable et si le sous-groupe d'isotropie G_x est fini ; On notera X^s l'ensemble des points stables.*

Exemple : $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $G = \left\{ \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s^{-1} \end{pmatrix} : s \in \mathbb{C}^* \right\}$. Dans ce cas, voici les polynômes invariants :

$$\mathbb{C}[T_0, T_1, T_2]^G = \bigoplus_{d_0, d_1 \geq 0} T_0^{d_0} T_1^{d_1} T_2^{d_0}$$

et les points in/semi/poly/stables :

$$\begin{aligned} X^{ins} &= \{[1:0:0], [0:0:1]\} \\ X^{ss} &= \mathbb{P}^2 \setminus \{[1:0:0], [0:0:1]\} \\ X^{ps} &= (z_0 z_2 \neq 0) \cup \{[0:1:0]\} \\ X^s &= (z_0 z_2 \neq 0) \ . \end{aligned}$$

En particulier, l'ensemble des points polystables n'est pas toujours ouvert. En revanche :

Proposition 2.1 *Les parties X^s et X^{ss} sont ouvertes et $G-$stables dans X.*

Démonstration : Démontrons que X^s est ouvert. Rappelons pour cela un résultat sur les fibres des morphismes :

Lemme 2.2 (*cf.* [Danilov, §4.4, th.]) *Soit $f : X \to Y$ un morphisme dominant entre variétés algébriques irréductibles.*

Pour tout $x \in X$, $\dim_x f^{-1}f(x) \geq \dim X - \dim Y$ et il existe un ouvert U de Y tel que pour tout $y \in Y$, $\dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$.

Posons $\gamma : G \times X \to X \times X$, $(g, x) \mapsto (x, g.x)$ et Δ_X la diagonale de $X \times X$. Soit x un point stable. Soit C est une composante irréductible de $\gamma^{-1}\Delta_X$ contenant $(1, x)$. On applique le lemme ci-dessus à $p_X : C \to X$, $(g, x) \mapsto x$ et on en déduit qu'il existe un ouvert U de X tel que pour tout $y \in U$, $\dim G_y = 0$. Soit F un polynôme homogène invariant tel que $F(x) \neq 0$ et $G.x$ est fermé dans l'ouvert affine X_F. Notons $Z := \{z \in X_F : \dim G_z > 0\}$. D'après ce qui précède, Z est un fermé $G-$stable de X_F, disjoint de l'orbite fermé $G.x$. Puisque G est réductif, il existe une fonction f régulière et $G-$invariante sur X_F telle que :

$$f|_{G.x} = 1, \ f|_Z = 0 \ .$$

Il existe alors un polynôme homogène et $G-$invariant R tel que $f = \frac{R}{F^\alpha}$ pour un entier α. Pour tout $y \in X_{RF}$, $\dim G_y = 0$. En particulier toutes les orbites de G dans X_{RF} ont la même dimension : $\dim G$ et sont donc fermées. L'ouvert X_{RF} contient x et est contenu dans X^s. On a ainsi montré que X^s est ouvert.

Q.e.d.

3 Définition du quotient en théorie géométrique des invariants

Proposition 3.1 *Soit $\mathbb{C}[X]$ l'anneau des fonctions régulières sur le cône au-dessus de X (*i.e. *l'anneau $\mathbb{C}[T_0, ..., T_n]/I_X$ où I_X est l'idéal engendré par les polynômes homogènes nuls sur X).*

Alors l'anneau des invariants $\mathbb{C}[X]^G$ est une $\mathbb{C}-$algèbre de type fini.

Démonstration : Il suffit de vérifier que l'idéal $\mathbb{C}[X]^G_+$ engendré par les polynômes invariants homogènes de degré > 0 est de type fini. C'est le cas car il est engendré par les $p(f_i)$ où p est l'opérateur de Reynolds $\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]^G$ et $(f_i)_i$ n'importe quel système de générateurs de $\mathbb{C}[X]_+$. **Q.e.d.**

On peut alors définir $X//G := \mathrm{Proj}\mathbb{C}[X]^G$ (pour la graduation induite par celle de $\mathbb{C}[X]$).

Digression-Rappel sur les Proj

Soit A une $\mathbb{C}-$algèbre graduée (en fait on peut remplacer $\mathbb{C}$ par un corps algébriquement clos arbitraire) *i.e.* :

$$A = \oplus_{d \geq 0} A_d, A_0 = \mathbb{C}, \forall\, d, d' \geq 0, A_d.A_{d'} \subseteq A_{d+d'} \ .$$

On notera A_+ l'idéal $\oplus_{d>0} A_d$.

On peut définir $\mathrm{Proj}A$ de la manière suivante :

— comme ensemble, $\mathrm{Proj}A$ est l'ensemble des idéaux premiers homogènes de A ne contenant pas A_+.

— une base d'ouverts est donnée par les ensembles $(\mathrm{Proj}A)^\circ_f$ où f est un élément homogène de A et $(\mathrm{Proj}A)^\circ_f$ est l'ensemble des idéaux dans $\mathrm{Proj}A$ ne contenant pas f.

— l'anneau des fonctions régulières sur $(\mathrm{Proj}A)^\circ_f$ est $(A_f)_0$ la partie homogène de degré 0 du localisé A_f *i.e.* $\{\frac{a}{f^m} \in A_f \ : \ a \in A_{m \deg f}\}$.

En particulier, $\mathrm{Proj}A$ est recouvert par des ouverts affines $(\mathrm{Proj}A)^\circ_f$ isomorphes àă $\mathrm{Spec}(A_f)_0$.

Si A est réduite *i.e.* sans nilpotent autre que 0 comme dans le cas affine on peut définir $\mathrm{Proj}A$ uniquement avec des morphismes de $\mathbb{C}-$algèbres vers $\mathbb{C}$:

$$\text{Proj}A = \{\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}-\text{alg.}}(A, \mathbb{C}) \ : \ \phi|_{A_+} \neq 0\} \,/ \sim$$

où $\phi \sim \phi'$ s'il existe $k > 0$ et $t \in \mathbb{C}^*$, tels que pour tout $m \geq 0$ et tout $a \in A_{km}$, $\phi(a) = t^m \phi'(a)$.

On peut vérifier que si $d > 0$ et $A^{(d)} := \oplus_{k \geq 0} A_{kd}$ (gradué de sorte que $A_k^{(d)} = A_{kd}$), alors $\text{Proj}(A^{(d)}) \simeq \text{Proj}A$.

Remarque : Si A est de type fini, il existe $d > 0$ tel que $A^{(d)}$ soit engendré par un nombre fini d'éléments de A_d (*cf.* [Bou, chapitre III, §1, proposition 3]).

Si A est engendré par des éléments homogènes $a_0, ..., a_N$ de même degré, on peut identifier Proj$A$ avec la variété projective :

$$\{[x] \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \ : \ F_1(x) = ... = F_r(x) = 0\}$$

où $F_1, ..., F_r$ est un système de générateurs quelconque de l'idéal

$$\{P \in \mathbb{C}[T_0, ..., T_N] \ : \ P(a_0, ..., a_N) = 0\} \ .$$

Remarque : Si les générateurs a_i sont de degrés distincts $d_0, ..., d_N$, il faut remplacer $\mathbb{P}^N$ par l'espace projectif àă poids $\mathbb{P}(d_0, ..., d_N)^\dagger$.

Avec la graduation usuelle, $\text{Proj}\mathbb{C}[X_0, ..., X_n] = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

†Si $S = \mathbb{C}[X_0, ..., X_n]/I$ o $\mathbb{C}[X_0, ..., X_n]$ est l'anneau des polynômes en $n+1$ variables X_0,... de degrés respectifs : $d_0, ...$ et où I est un idéal homogène, alors comme ensemble :

$$\text{Proj}S = \Big\{(t_0, ..., t_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \ : \ \forall\, P \in I, P(t_0, ..., t_n) = 0\Big\} \,/ \sim$$

o pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $(t_0, ..., t_n) \sim (\lambda^{d_0} t_0, ..., \lambda^{d_n} t_n)$.

Théorème 3.2 *Si $X^{ss} \neq \emptyset$, alors il existe un morphisme surjectif $\pi : X^{ss} \rightarrow X//G$ tel que :*

1. *π est affine ;*
2. *$\forall\, x, y \in X^{ss}, \pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow \overline{G.x} \cap \overline{G.y} \cap X^{ss} \neq \emptyset$;*
3. *Il existe un ouvert $(X//G)^s$ de $X//G$ tel que $\pi^{-1}(X//G)^s = X^s$;*

De plus, si $x \in X^s$, x est stable $\Leftrightarrow G_x$ fini et $G.x$ fermé dans X^{ss}.

Démonstration :

Le morphisme π est le morphisme associé ‘a l'inclusion $\mathbb{C}[X]^G \subseteq \mathbb{C}[X]$.

Plus concr ‘etement, si $f_0, ..., f_N$ sont des générateurs homogènes de $\mathbb{C}[X]^G$, de degrés $d_0, ..., d_N$, on définit le morphisme $\pi : X^{ss} \rightarrow X//G$ par :

$$\pi([x]) := [f_0(x), ..., f_N(x)]$$

(si $0 \neq x \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $[x] \in X^{ss}$) l'image du $n+1-$uplet $(f_0(x), ..., f_N(x))$ dans $\mathbb{P}(d_0, ..., d_N)$.

Si F est un élément homogène de $\mathbb{C}[X]^G$ on note $(X//G)_F$ l'ouvert affine $\mathrm{Proj}(\mathbb{C}[X]^G)^\circ_F \simeq \mathrm{Spec}((\mathbb{C}[X]^G_F)_0)$.

Soient $x, y \in X^{ss}$ tels que $\pi(x) = \pi(y)$. Soit F homogène et $G-$invariant tel que $F(x) \neq 0$. Comme $\pi(x) = \pi(y)$, on a aussi $F(y) \neq 0$. Si $\overline{G.y} \cap \overline{G.x} \cap X_F = \emptyset$, alors on peut trouver une fonction régulière et $G-$invariante sur l'ouvert affine X_F telle que $f\big|_{\overline{G.x}} = 1$ et $f\big|_{\overline{G.y}} = 0$. Il existe alors $k > 0$ et H un polynôme $G-$invariant homogène de degré $k \deg F$ tel que $f = \frac{H}{F^k}$. On a ainsi :

$$\frac{H(x)}{F^k(x)} = 1 \text{ et } \frac{H(y)}{F^k(y)} = 0$$

ce qui est impossible car $\pi(x) = \pi(y)$.

Réciproquement si $\overline{G.x} \cap \overline{G.y} \cap X^{ss} \neq \emptyset$, soit z dans cette intersection. Soit F homogène et $G-$invariant tel que $F(z) \neq 0$. On a forcément $x, y \in X_F$. De plus si $k > 0$ et si H est un polynôme $G-$invariant homogène de degré $k \deg F$, alors $\frac{H}{F^k}$ est une fonction régulière sur X_F et on a :

$$\frac{H(x)}{F^k(x)} = \frac{H(z)}{F^k(z)} = \frac{H(y)}{F^k(y)} \ .$$

En particulier :

$$H(x) = \left(\frac{F(x)}{F(y)}\right)^k H(y)$$

pour tout polynôme H homogène $G-$invariant de degré $k \deg F$. Cela entraîne : $\pi(x) = \pi(y)$.

L'ouvert X^s est recouvert par des ouverts de la forme X_F pour certains polynômes $G-$invariants et homogènes. Pour $(X//G)_s$, il suffit de prendre la réunion des ouverts $(X//G)_F$.

Pour finir, soit $x \in X^s$, nous allons montrer que $G.x$ est fermé dans X^{ss}. Comme $\pi : X^{ss} \to X//G$ est un morphisme $G-$invariant, $\overline{G.x} \cap X^{ss} \subseteq \pi^{-1}\pi(x)$. Il existe un polynôme homogène et $G-$invariant F tel que $F(x) \neq 0$ et $G.x$ est fermé dans X_F. Alors, pour tout $y \in \overline{G.x} \cap X^{ss}$, on a : $\pi(x) = \pi(y)$, d'où : $F(y) \neq 0$ *i.e.* $y \in X_F \cap \overline{G.x} = G.x$.

Q.e.d.

4 Lien avec le quotient symplectique

Pour tout $z = (z_0, ..., z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, on notera $||z||^2 := |z_0|^2 + ... + |z_n|^2$.

Définition 2 *Pour tout* $[z] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *soit* $\langle\, ,\, \rangle_{[z]}$ *la forme hermitienne sur l'espace tangent* $T_{[z]}\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *définie par :*

$$\left(\frac{\sum_{k=0}^n \frac{\sum_{j\neq k} |z_j|^2}{||z||^2} d\overline{z_k} \otimes dz_k - \sum_{i\neq j} \overline{z_i} z_j d\overline{z_i} \otimes dz_j}{2\pi ||z||^2} \right) .$$

La forme symplectique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ *est :* $[z] \mapsto \mathrm{Im}(\langle\, ,\, \rangle_{[z]})$.

Soit $X \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ une variété projective. Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$, réductif connexe. On suppose que X est $G-$stable. Soit $K \subseteq G$ un groupe de Lie compact connexe dont G est le complexifié *i.e.* si $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{g}$ sont les alg 'ebres de Lie de K et de G, $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{k} = \mathfrak{g}$. On supposera que $K = G \cap U_{n+1}(\mathbb{C})$ où : $U_{n+1}(\mathbb{C}) := \{g \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) \ : \ {}^t g \overline{g} = 1\}$. On identifiera l'alg 'ebre de Lie $\mathfrak{k}$ 'a une sous-alg 'ebre de l'alg 'ebre des matrices antihermitiennes : $\{H \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ {}^t\overline{H} = -H\}$.

Soit

$$\mu : X \to \mathfrak{k}^* \ , \ [v] \mapsto \mu([v]) : a \in \mathfrak{k} \mapsto \frac{{}^t\overline{v} a v}{2i\pi ||v||^2} \in \mathbb{R} \ .$$

Remarque : La forme de Fubini-Study induit une $K-$forme symplectique ω sur X :

$$\forall\, x \in X, \ \omega_x := \mathrm{Im}(\langle\, ,\, \rangle_x |_{T_x X}) \ .$$

Alors, (X, ω) est une $K-$variété symplectique et $\mu : X \to \mathfrak{k}^*$ une application moment $K-$équivariante (pour l'action coadjointe de K sur $\mathfrak{k}^*$)

En particulier, le quotient $\mu^{-1}(0)/K$ a une structure de variété symplectique (*cf.* les exposés de Serge Parmentier dans ce même groupe de travail).

Ex : Si $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ et si $K := \left\{ \begin{pmatrix} e^{-it} & & & \\ & e^{it} & & \\ & & ... & \\ & & & e^{it} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \simeq S^1$,

$\mathfrak{k} \simeq i\mathbb{R}$ et pour tout $[v] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$:

$$\mu([v])(i) = \frac{-|v_0|^2 + ... + |v_n|^2}{2\pi ||v||^2} \ .$$

Dans ce cas : $\mu^{-1}(0)/S^1 \simeq \mathbb{P}^{n-1} \simeq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})//\mathbb{C}^*$.

Ce dernier isomorphisme est une illustration du théor ‘eme suivant :

Théorème 4.1 *i)* $x \in X^{ss} \Leftrightarrow \overline{G.x} \cap \mu^{-1}(0) \neq \emptyset$ *;*

ii) L'inclusion $\mu^{-1}(0) \subseteq X^{ss}$ *induit un homéomorphisme :*

$$\mu^{-1}(0)/K \to X//G \ , \ \ Kx \mapsto \pi(x) \ .$$

iii) L'homéomorphisme de ii) induit par restriction un homéomorphisme :

$$\mu^{-1}(0)_{\mathrm{reg}}/K \to X^s/G$$

où :

$$\mu^{-1}(0)_{\mathrm{reg}} = \{x \in \mu^{-1}(0) \ : \ d\mu|_x : T_xX \to \mathfrak{k}^* \ \textit{est surjective}\} \ .$$

Démonstration :

On pose pour tout $v \in \mathbb{C}^{n+1}$ *et tout* $g \in G$*,* $p_v(g) := ||g.v||^2$.

On a alors :

$$\forall \, a \in \mathfrak{k}, \ \forall \, [v] \in X, \ \mu([v])(a) = \frac{dp_v|_1 \, (ia)}{2\pi ||v||^2} \ .$$

La démonstration du théor ‘eme repose en grande partie sur le lemme suivant :

Lemme 4.2 *l1)* $dp_v|_g = 0 \Leftrightarrow p_v(g)$ *est un minimum global ;*

l2) si $p_v(g)$ *est un minimum, alors :* $p_v^{-1}(p_v(g)) = KgG_v$ *où* G_v *est le stabilisateur de* v *dans* G *;*

l3) p_v *atteint un minimum* $\Leftrightarrow$ *l'orbite* $G.v$ *est fermée dans* $\mathbb{C}^{n+1}$ *;*

l4) $dp_v(g) = 0 \Leftrightarrow \mu(g[v]) = 0$ *;*

l5) si $0 \neq v \in \mathbb{C}^{n+1}$ *et si l'orbite* $G.v$ *est fermée dans* $\mathbb{C}^{n+1}$*, alors* $[v] \in X^{ss}$ *et* $G.[v]$ *est fermée dans* X^{ss}.

Admettons ...

Démontrons i) :

Soit $x = [v] \in X^{ss}$*. Il existe un polynôme homog 'ene et* $G-$*invariant tel que* $F(v) \neq 0$*. Alors :* $\overline{G.v} \subseteq F^{-1}(F(v)) \Rightarrow 0 \notin \overline{G.v}$*. Soit* w *dont l'orbite* $G.w$ *est fermée dans* $\overline{G.v}$*. Puisque* $F(w) \neq 0$*,* $[w] \in X^{ss}$*. On a aussi* $G.[w] \subseteq \overline{G.x}$*. De plus,* $G.[w] \cap \mu^{-1}(0) \neq \emptyset$ *d'apr 'es l3) et l4).*

Réciproquement, supposons que $\overline{G.x} \cap \mu^{-1}(0) \not\emptyset$*. Soit* $[v]$ *dans cet intersection. D'apr 'es l4), l1) et l3),* $G.v$ *est fermée dans* $\mathbb{C}^{n+1}$*. Donc l5)* $\Rightarrow [v] \in X^{ss}$*. Puisque* $[v] \in \overline{G.x}$ *et que* X^{ss} *est un ouvert* $G-$*stable de* X*,* $x \in X^{ss}$*.*

Démontrons ii) :

Soit $x \in X^{ss}$*. D'apr 'es i), il existe* $y \in \overline{G.x} \cap \mu^{-1}(0)$*. On a alors :*$\pi(x) = \pi(y)$ *donc* $\mu^{-1}(0) \to X//G$ *est surjective.*

Si $x, y \in \mu^{-1}(0)$ *et si* $\pi(x) = \pi(y)$*, alors* $\overline{G.x} \cap \overline{G.y} \cap X^{ss} \neq \emptyset$*. Or, d'apr 'es l4), l1), l3) et l5),* $G.x$ *et* $G.y$ *sont fermés dans* X^{ss}*. Donc* $G.x = G.y$*. Il existe* $v, w \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ *et* $g \in G$ *tels que* $x = [v], y = [w], w = gv$*. On a donc :* $\mu([v]) = \mu(g.[v]) = 0 \overset{(l4+l1)}{\Rightarrow} p_v(1) = p_v(g) \overset{(l2)}{\Rightarrow} g \in KG_v$*. D'où :* $w = gv \in Kv \Rightarrow y \in Kx$*.*

Par conséquent $\mu^{-1}(0)/K \to X//G$ *est aussi injective donc bijective. Comme* $\mu^{-1}(0)/K$ *et* $X//G$ *sont compacts (car* $\mu^{-1}(0)$ *est fermé dans* X *et* $X//G$ *est une variété projective) on a bien un homéomorphisme.*

Démontrons iii) :

$$d\mu|_x : T_xX \to \mathfrak{k}^* \textit{ surjective } \Leftrightarrow \dim \ker d\mu|_x = \dim X - \dim K \ .$$

Or, $\ker d\mu|_x = \mathfrak{k}_x^{\perp}$ *(l'orthogonal pour la forme symplectique* ω*) (cf. un autre exposé du même groupe de travail). Donc* $\dim \ker d\mu|_x = \dim X - \dim K.x$*. Ainsi* $d\mu|_x$ *est surjective* $\Leftrightarrow \dim K.x = \dim K$ i.e. $\dim K_x = 0$ i.e. K_x *fini.*

Si $x \in \mu^{-1}(0)$*, d'apr 'es l4), l3) et l5), l'orbite* $G.x$ *est fermée dans* X^{ss}*.*

Il reste donc 'a montrer que si $x \in \mu^{-1}(0)$*,* K_x *fini* $\Leftrightarrow G_x$ *fini.*

Soit $x \in X$ *tel que* $\mu(x) = 0$ *et soit* $g \in G$ *tel que* $g.x = x$*. Il existe* $k \in K$ *et* $a \in \mathfrak{k}$ *tel que* $g = k\exp(ia)$*. En effet, il existe* $a_1, a_2 \in \mathfrak{k}$ *tels que :* $g = \exp(a_1 + ia_2)$*. On a alors* g^*g *de la forme* $\exp(2ia)$ *(Campbell-Hausdorff) pour un certain* $a \in \mathfrak{k}$ *et on vérifie que* $g\exp(-ia) \in G \cap U_{n+1}(\mathbb{C}) = K$*.*

Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$*,* $h(t) := \mu(\exp(ita).x).a \in \mathbb{R}$*.*

Comme $g.x = x$ *et comme* μ *est* $K-$*invariante,* $0 = \mu(x) = \mu(g.x) = \mu(k^{-1}g.x) = \mu(\exp(ia).x)$*. Donc* $h(0) = h(1) = 0$*. Il existe par conséquent* $0 < t < 1$ *tel que* $h'(t) = 0$*. Or, si on pose* $y := \exp(ita).x$ *et* $a_y := \frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} \exp(\epsilon a).y$*, on a :*

$$h'(t) = d\mu(y)(ia_y).a = \omega_y(ia_y, a_y) = \langle a_y, a_y \rangle_y \ .$$

Par conséquent : $a_y = 0$. *Donc* $\exp(\mathbb{R}a)$ *et* $\exp(i\mathbb{R}a)$ *fixent* y *et aussi* x. *Mais alors* $\exp(i\mathbb{R}a) \subseteq K_x$ *; donc si on suppose que* K_x *est fini,* $a = 0$ *et* $g \in K$. *D'où :* $G_x = K_x$ *si* K_x *est fini et* $\mu(x) = 0$. **Q.e.d.**

Démonstration du lemme 4.2 :

l5) : Si $0 \neq v \in \mathbb{C}^{n+1}$ et si l'orbite $G.v$ est fermée dans $\mathbb{C}^{n+1}$, alors comme G est réductif, il existe un polynôme $G-$invariant F tel que $F|_{G.v} = 1$ et $F(0) = 0$. Quitte 'a remplacer F par une de ses composantes homog 'enes, on peut supposer que F est homog 'ene. On a alors $[v] \in X^{ss}$. Soit $x := [v]$. Soit $y = [w] \in \overline{G.x} \cap X^{ss}$; il existe f homog 'ene et $G-$invariant tel que $f(y) \neq 0$. Forcément, $x \in X_f$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(y) = f(w) = 1$.

Or :

$$\psi : \ f^{-1}(1) \to \mathbb{P}^n_f := \{[z] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \ : \ f(z) \neq 0\}$$

$$z \mapsto [z]$$

est un morphisme (de variétés algébriques affines) fini donc fermé. Par conséquent :

$$y = [w] \in \overline{G.[v]} \cap X_f = \overline{\psi(G.v)} = \psi(G.v) = G.x \ .$$

l4) : déj 'a fait !

l3) : Si $G.v$ est fermée, alors $\inf_{w \in G.v} ||w||^2$ est atteint !

Pour la réciproque on utilise le résultat suivant :

Lemme 4.3 ([Kempf, th. 1.4]) *Si on a une orbite fermée* $G.w \subseteq \overline{G.v}$, *alors il existe un sous-groupe 'a un param 'etre* $\lambda : \mathbb{C}^* \to G$ *tel que* $\lim_{t \to 0} \lambda(t).v \in G.w$

Si on admet ce lemme et si on suppose que p_v atteint un minimum en 1, soit $G.w$ une orbite fermée de $\overline{G.v}$. On choisit un sous-groupe 'a un param 'etre λ comme dans le lemme. Décomposons v en vecteurs propres pour λ :

$$v = v_1 + ... + v_r$$

où $r \geq 1$ et $\lambda(t).v_i = t^{n_i}$ pour tout i et pour certains entiers $n_1 < ... < n_r$.

Puisque

$$\lim_{t \to 0} \lambda(t).v$$

existe, $n_i \geq 0$ pour chaque i. Si $n_1 > 0$, $\lim_{t \to 0} \lambda(t).v = 0$ et p_v n'atteint pas son infimum sur G. Donc $n_1 = 0$ et $v_1 \in G.w$. Comme pour tout $t \in \mathbb{C}^*$ on a :

$$||\lambda(t).v||^2 = ||v_1 + t^{n_2}v_2 + ...||^2 \geq ||v_1 + ... + v_r||^2$$

forcément $r = 1$ et $v = v_1 \in G.w \Rightarrow G.v$ fermé.

l2) : Supposons que p_v atteigne un minimum en 1 et que $p_v(g) = p_v(1)$ *i.e.* $||g.v||^2 = ||v||^2$ pour un certain $g \in G$. Il existe $a \in \mathfrak{k}$ tel que $g \in K\exp(ia)$. On a alors :

$$||\exp(ia).v||^2 = ||v||^2 \ .$$

Comme l'application : $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto ||\exp(ita).v||^2$ est convexe, on a :

$h(t) = h(0) = h(1)$ pour tout $0 \leq t \leq 1$. Soient $v_1, ..., v_r$ des vecteurs propres de la matrice antihermitiennes a associés ‘a des valeurs propres (distinctes) $i\lambda_1, ..., i\lambda_r \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$h(t) = ||\exp(ita).v||^2 = \sum_{1 \leq j \leq r} e^{-t\lambda_j}||v_j||^2 = \text{cste}$$

sur $[0, 1]$. On en déduit que $r = 1$ et $\lambda_1 = 0$. En particulier : $\exp(ia).v = v$ et $\exp(ia) \in G_v$. On a bien montré que $g \in KG_v$.

l1) : Comme $G = K\exp i\mathfrak{k}$ (*cf.* ci-dessus), il suffit de vérifier que l'application : $\mathfrak{k} \to \mathbb{R},\ a \mapsto ||\exp(ia).v||^2$ est convexe. C'est le cas, il suffit de calculer la dérivée seconde et d'utiliser que a est diagonalisable dans une base orthonormée avec des valeurs propres dans $i\mathbb{R}$!

Cela ach ‘eve la démonstration du lemme 4.2.

5 Crit ‘ere d'Hilbert-Mumford

Pour déterminer si un point de X est semi-stable, on n'est pas obligé de calculer l'alg ‘ebre des invariants $\mathbb{C}[X]^G$. C'est ce que nous allons voir dans cette partie.

On notera $Y(G)$ le réseau des sous-groupes ‘a un param ‘etre de G *i.e.* les morphismes de groupes algébriques $\mathbb{C}^* \to G$.

Définition 3 *Soient $x = [v] \in X$ et $\lambda \in Y(G)$. Il existe une décomposition de v :*

$$v = v_1 + ... + v_r$$

où les v_i sont non nuls et $\lambda(t).v_i = t_i^n v_i$ pour certains entiers n_i deux ‘a deux distincts.

On pose $\mu(x, \lambda) := \min\{n_i\ :\ 1 \leq i \leq r\}$.

Propriétés : $\mu(g.x, g\lambda g^{-1}) = \mu(x, \lambda)$.
Remarque : Comme X est projective, le morphisme

$$\mathbb{C}^* \to X\ ,\ t \mapsto \lambda(t).x$$

se prolonge de mani ‘ere unique ‘a $\mathbb{C}$. On notera $\lim_{t\to 0}\lambda(t).x$ l'image de 0 par ce prolongement.

Alors, $\mu(x,\lambda)$ est aussi le poids avec lequel $\mathbb{C}^*$ agit sur la fibre $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_y$ où $y := \lim_{t\to 0}\lambda(t).x$.

Théorème 5.1 (crit ‘ere de Hilbert-Mumford) *i) Un point $x\in X$ est semi-stable $\Leftrightarrow \mu(x,\lambda)\le 0$ pour tout $\lambda\in Y(G)$ non constant ;*

ii) Un point $x\in X$ est stable $\Leftrightarrow \mu(x,\lambda)<0$ pour tout $\lambda\in Y(G)$ non constant.

Démonstration : Soit $\lambda\in Y(G)$ non trivial. Soit $x=[v]$ où comme ci-dessus, $v=v_1+...+v_r$ pour des v_i vecteurs propres de λ de poids n_i. Supposons $n_1<...<n_r$. On alors $\mu(x,\lambda)=n_1$.

i) : $\Rightarrow$: Supposons x semi-stable. Si $n_1>0$, alors $\lim_{t\to 0}\lambda(t).v=0$ donc $0\in\overline{G.v}$. Cela contredit l'existence d'un polynôme homog ‘ene et $G-$invariant tel que $F(v)\neq 0$.

Donc $n_1=\mu(x,\lambda)\le 0$.

$\Leftarrow$: D'apr ‘es le lemme 4.3, si $0\in\overline{G.v}$, il existe un sous-groupe ‘a un param ‘etre $\lambda\in Y(G)$ tel que $\lim_{t\to 0}\lambda(t)v=0$. Cela entraîne $\mu(x,\lambda)>0$: contradiction !

Donc $0\notin\overline{G.v}$ et comme G est réductif, il existe un polynôme homog ‘ene et $G-$invariant F tel que $F(v)\neq 0$.

ii) se démontre avec des arguments similaires.

Q.e.d.

6 Points ordonnés sur la droite projective

6.1

Soient $X=\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Si $r\in\mathbb{Z}$, on pose :

$$\lambda_r:\mathbb{C}^*\to G\ ,\ t\mapsto\begin{pmatrix} t^r & 0\\ 0 & t^{-r}\end{pmatrix}\ .$$

Si $r>0$, on a :

$$\forall\, x\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\ \mu(x,\lambda_r)=\begin{cases} -r \text{ si } x\neq[1:0]\\ r \text{ si } x=[1:0]\end{cases}$$

et si $r<0$, il suffit de remplacer ci-dessus $[1:0]$ par $[0:1]$ et d'échanger r et $-r$.

6.2

Cette fois, $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})^n$, $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ qui agit diagonalement. Notons $x = (x_1, ..., x_n)$ les coordonnées de x ($\forall\, i, x_i \in \mathbb{P}^1$).

On a alors si $r > 0$:

$$\begin{aligned}\mu(x, \lambda_r) = \mu(x_1, \lambda_r) + ... + \mu(x_n, \lambda_r) &= kr - (n-k)r \\ &= (2k-n)r\end{aligned}$$

où k est le nombre de coordonnées $x_i = [1:0]$.

On obtient tous les sous-groupes ‘a un param ‘etre de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ en conjugant par exemple λ_1 par les $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Or si $\lambda = g\lambda_1 g^{-1}$, $\mu(x, \lambda) = 2k - n$ où cette fois, k est le nombre de coordonnées $x_i = g^{-1}[1:0]$.

Finalement, $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})^n$ est semi-stable pour l'action diagonale de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ $\Leftrightarrow$ pour tout k tel qu'une coordonnée x_i de x se rép ‘ete k fois, $2k - n \leq 0$ *i.e.* chaque coordonnée de x est répétée au plus $[\frac{n}{2}]$ fois.

De la même façon, on peut vérifier que x est stable si chacune de ses coordonnées est répétée strictement moins de $[\frac{n}{2}]$ fois.

En particulier tous les points semi-stables sont stables si n est impair.

6.3

description de l'application moment dans ce cas :

$K = SU_2(\mathbb{C})$, $\mathfrak{k} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \simeq \mathbb{R}^3$.

Si on note $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, on a au moyen d'une projection stéréographique : $\S^2 \xrightarrow{\simeq}$, le diagramme commutatif suivant :

$$(t_1, ..., t_n) \longmapsto (p(t_1)..., p(t_n))$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})^n \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\mu"'] & (S^2)^n \arrow[d] \\ \mathfrak{k}^* \arrow[r, "\simeq"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (s_1, ..., s_n) \arrow[d, mapsto] \\ s_1 + ... + s_n \end{tikzcd}$$

$$l \longmapsto \left(l\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, l\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, l\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right)$$

où si $t = [x:y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $p(t) := (\frac{|y|^2 - |x|^2}{|x|^2 + |y|^2}, \frac{\mathrm{Im}(y\overline{x})}{|x|^2 + |y|^2}, \frac{\mathrm{Re}(y\overline{x})}{|x|^2 + |y|^2}) \in S^2$.

6.4

On reprend l'exemple ci-dessus pour $n = 4$.

Dans ce cas :

$$X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})^4 \ ,$$

$$X^{ss} = \{(x_1, ..., x_4) \in X \ : \ \text{ chaque } x_i \text{ est répété au plus 2 fois } \} \ ,$$

$$X^s = \{(x_1, ..., x_4) \in X \ : \ \text{ les } x_i \text{ sont 2 `a 2 distincts } \} \ .$$

De plus, pour l'action diagonale de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, il y a 9 orbites qui sont semi-stables, non stables. Plus précisément, il y a 3 adhérences d'orbites semi-stables non stables et chacune contient 2 orbites fermées :

$$G.(0,1,1,0), G.(0,\infty,\infty,0) \subseteq \overline{G.(0,1,\infty,0)}$$
$$G.(0,1,0,1), G.(\infty,1,\infty,1) \subseteq \overline{G.(0,1,\infty,1)}$$
$$G.(0,0,\infty,\infty), G.(1,1,\infty,\infty) \subseteq \overline{G.(0,1,\infty,\infty)}$$

où l'on a posé : $0 := [1:0], 1 := [1:1], \infty := [0:1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Enfin, le morphisme $G-$invariant :

$$X^{ss} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$
$$([v_1],[v_2],[v_3],v_4]) \mapsto [\det(v_1,v_2)\det(v_3,v_4) : \det(v_2,v_3)\det(v_4,v_1)]$$

induit les isomorphismes suivants :

$$\begin{tikzcd}
X//G \arrow[r, "\simeq"] & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\
X^s/G \arrow[u, hook] \arrow[r, "\simeq"] & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

$$G.(0,1,\infty,t) \longmapsto t$$

où : $t := [1:t] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ pour tout $t \in \mathbb{C}$.

Remarque : L'inverse de l'isomorphisme de la première ligne est donné par : $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to X//G$, $[x:y] \mapsto \pi(0,1,,\infty,[x:y])$ où $\pi : X^{ss} \to X//G$ est la projection sur le quotient.

7 Cohomologie du quotient

Objectif : Calculer la cohomologie (singulière) $H^*(X//G)$. Pour cela on construit une stratification de X :

$$X = \bigsqcup_\beta S_\beta$$

dont la strate ouverte est $S_0 = X^{ss}$ et on établit une sorte de relation de récurrence entre la cohomologie équivariante de X et celle des strates.

7.1 Préliminaires à la stratification

Définition 4 *On note $Y(G)$ le groupe des sous-groupes-à-un-paramètre de G.*

Soit

$$M(G) := Y(G) \times \mathbb{Z}_{>0} / \sim$$

où $(\lambda, m) \sim (\lambda', m')$ si pour tout $t \in \mathbb{C}^*$, $\lambda(t^{m'}) = \lambda'(t^m)$.

Notation : $\frac{\lambda}{m} := \sqrt[m]{\lambda} := (\lambda, m) \bmod \sim$.

Remarque : si $G = \mathbb{G}_m^r \simeq (\mathbb{C}^*)^r$ est un tore de dimension r, alors :

$$\mathbb{Z}^r \simeq Y(G),\ (\alpha_1, ..., \alpha_r) \mapsto (t \in \mathbb{G}_m \mapsto (t^{\alpha_1}, ..., t^{\alpha_r}) \in G)$$

et :

$$\mathbb{Q}^r \simeq M(G),\ (\frac{\alpha_1}{q}, ..., \frac{\alpha_r}{q}) \mapsto (t \mapsto \sqrt[q]{(t^{\alpha_1}, ..., t^{\alpha_r})})$$

L'action du groupe G sur $Y(G)$ par conjugaison se prolonge à $M(G)$.

Définition 5 *Une norme sur $M(G)$ est une application $q : M(G) \to \mathbb{Q}$ $G-$invariante est telle que pour tout tore $T \subseteq G$, la restriction $q\Big|_{M(T)}$ est une forme quadratique définie positive.*

Exemple : Si G est semi-simple et K est la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ (*i.e.* $K(X,Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y))$), on peut prendre :

$$q(\lambda) := K(\lambda'(1), \lambda'(1))$$

où $\lambda'(1) = \frac{d\lambda}{dt}|_{t=1}$.

Si $x \in X$, la définition de $\mu(x, \lambda)$ s'étend de manière unique de $\lambda \in Y(G)$ à $\lambda \in M(G)$ de sorte que : $\mu(x, r\lambda) = r\mu(x, \lambda)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

On fixe pour la suite une norme sur $M(G)$ que l'on note $||\ \ ||^2$.

Définition 6 ([Hesselink, 4.1]) *Pour tout $x \in X$, on note*

$$q_G(x) := \inf\{||\lambda||^2 \ : \ \lambda \in M(G), \mu(x,\lambda) \geq 1\}$$

et :

$$\Lambda_G(x) := \{\lambda \in M(G) \ : \ \mu(x,\lambda) \geq 1, ||\lambda||^2 = q_G(x)\}$$

Remarques :

— D'après le critère d'Hilbert-Mumford, x est semi-stable $\Leftrightarrow q_G(x) = \infty$. On verra que si $q_G(x) < \infty$, $\Lambda_G(x) \neq \emptyset$ (l'infimum est un min).

— L'ensemble $\Lambda_G(x)$ va servir à définir la strate contenant x.

Exemple : si $G = T$ est un tore ...

Notons $(\ ,\ )$ le produit scalaire sur $M(T)$ correspondant à la forme quadratique $||\ ||^2$. Si χ est un caractère de T, alors χ définit un élément du dual de $M(T)$. On peut donc définir $\chi^* \in Y(T)$ (unique) tel que :

$$\langle \chi, \ \rangle = (\chi^*, \ )$$

sur $M(T)$. Notons $\chi_0, ..., \chi_n$ les poids par lesquels T agit sur $\mathbb{C}^{n+1}$ et $\chi_0^*, ..., \chi_n^* \in Y(T)$ les sous-groupes-à-un paramètre correspondants.

Soit $x = [x_0 : ... : x_n] \in X$.

On note $C(x)$ l'enveloppe convexe de l'ensemble fini $\{\chi_i^* \ : \ x_i \neq 0\}$.

Voici un lemme de géométrie élémentaire :

Lemme 7.1 *Il existe un unique élément $\beta \in C(x)$ tel que $||\beta||^2$ est minimal.*

Démonstration : Par récurrence sur la dimension d du $\mathbb{Q}-$espace vectoriel engendré par les χ_i^* et en utilisant que tout élément de $C(x)$ peut s'écrire comme un barycentre de $d+1$ éléments parmi les χ_i^*.

Q.e.d.

Ce $\beta \in M(T)$ sera l'indice de la strate contenant x.

Voici le lien entre β et l'ensemble $\Lambda_T(x)$:

Lemme 7.2

$$\Lambda_T(x) = \begin{cases} \{\frac{\beta}{||\beta||^2}\} \ \textit{si } \beta \neq 0 \\ \emptyset \ \textit{sinon} \end{cases}$$

Démonstration : *cf.* les lemmes 12.6 et 12.7 de [Kir]. **Q.e.d.**

7.2 Indices de la stratification

Soit T un tore maximal de G. Soient $\{\chi_0, ..., \chi_n\}$ les poids de T dans $\mathbb{C}^{n+1}$.

On appellera un élément $\beta \in M(T)$ tel que $||\beta||$ est minimal parmi les normes des éléments de l'enveloppe convexe d'une partie de l'ensemble $\{\chi_0^*, ..., \chi_n^*\}$ une *combinaison minimale de poids.*

Notons $M(T)_+$ le cône engendré par les sous-groupes-à-un-paramètre dominants.

Si par exemple, $G = \mathrm{SL}_r$ et T est le tore des matrices diagonales, via l'identification usuelle entre $M(T)$ et $\mathbb{Q}^r$, $M(T)_+$ correspond aux $(q_1, ..., q_r) \in \mathbb{Q}^r$ tels que $q_1 \geq ... \geq q_r$.

On notera $\mathscr{B}$ l'ensemble des combinaisons minimales de poids qui sont dans $M(T)_+$.

7.3 Stratification de X

Définissons les strates :

Définition 7 *Pour tout $\beta \in M(T)$, soit :*

$$S_\beta := \begin{cases} G\{x \in X \ : \ \frac{\beta}{||\beta||^2} \in \Lambda_G(x)\} & si\ \beta \neq 0 \\ G\{x \in X \ : \ \Lambda_G(x) = \emptyset\} & sinon. \end{cases}$$

Proposition 7.3 *X est la réunion disjointe des S_β, $\beta \in \mathscr{B}$.*

On a de plus :

Proposition 7.4 *Pour tout β, $\overline{S_\beta} \subseteq \cup_{\substack{\beta' \\ ||\beta'|| \geq ||\beta||}} S_{\beta'}$.*

cf. les lemmes 12.15 et 12.16 de [Kir].

7.4 Description des strates

Soit $\beta \in M(T)$.

Définition 8 *Soient*

$$Z_\beta := \{[x_0 : ... : x_n] \in X \ : \ \langle \chi_j, \beta \rangle \neq ||\beta||^2 \Rightarrow x_j = 0\}$$

et :

$$Y_\beta := \left\{ [x_0 : ... : x_n] \in X \ : \ \begin{cases} \langle \chi_j, \beta \rangle < ||\beta||^2 \Rightarrow x_j = 0 \\ \exists j,\ \langle \chi_j, \beta \rangle = ||\beta||^2 \} \end{cases} \right\} .$$

La variété Z_β est une sous-variété fermée de X et Y_β une sous-variété localement fermée.

On définit le morphisme de variétés :

$$p_\beta : Y_\beta \to Z_\beta$$
$$x \mapsto \lim_{t\to 0} \beta(t).x$$

autrement dit :

$$p_\beta([x_0 : ... : x_n]) = [x'_0 : ... : x'_n]$$

où $x'_j = \begin{cases} x_j \text{ si } \langle \chi_j, \beta \rangle = ||\beta||^2, \\ \quad 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Remarque : puisque $p_\beta(x) \in \overline{G.x}$, p_β est bien à valeurs dans Z_β.

Définition 9 *Soient*

$$Z_\beta^{ss} := \{x \in Z_\beta \; : \; \frac{\beta}{||\beta||^2} \in \Lambda_G(x)$$

et $Y_\beta := p_\beta^{-1} Z_\beta$.

Remarques : — Notons stab_β le sous-groupe de G stabilisateur de β pour l'action adjointe. Le groupe stab_β est réductif et laisse stable Z_β. De plus, d'après [Kir, rem. 12.21], il exite un sous-groupe réductif connexe G_β de $\mathrm{stab}\beta$ tel que Z_β^{ss} est l'ensemble des points de Z_β semi-stables pour l'action de G_β.

Soit λ un sous-groupe à un paramètre de G qui est un multiple de β. On note $P_\beta := P_\lambda := \{g \in G \; : \; \lim_{t\to 0} \lambda(t) g \lambda(t^{-1}) \text{ existe dans } G\}$.

Proposition 7.5 — *Z_β^{ss} est un ouvert* $\mathrm{stab}\beta$*−stable de Z_β ;*

— *Y_β et Y_β^{ss} sont P_β−stables.*

Le résultat suivant permet de décrire les fibres du morphisme p_β.

Théorème 7.6 ([BB, th. 4.3]) *On suppose que V est un $\mathbb{G}_m$−module*[†] *et que X est une sous-variété fermée lisse et $\mathbb{G}_m$−stable de $\mathbb{P}(V)$.*

Alors :

i) l'ensemble $X^{\mathbb{G}_m}$ des points $\mathbb{G}_m$− fixes de X est une réunion disjointe de sous-variétés fermés connexes et lisses de X.

Pour tout $x \in X$, le morphisme :

[†]on peut remplacer ici $\mathbb{C}$ par n'importe quel corps algébriquement clos

$$\mathbb{G}_m \to X$$

$$t \mapsto t.x$$

se prolonge de manière unique à $\mathbb{A}^1$ *et on note* $\lim_{t\to 0} t.x$ *l'image de* 0 *par ce prolongement.*

ii) Si C *est une composante connexe de* $X^{\mathbb{G}_m}$*, alors l'ensemble* Y *des* $y \in X$ *tels que* $\lim_{t\to 0} t.y \in C$ *est une sous-variété localement fermée et lisse de* X*.*

iii) de plus le morphisme $Y \to C$*,* $y \mapsto \lim_{t\to 0} t.y$ *est un fibré vectoriel* i.e. *une fibration localement triviale de fibre un espace affine (sur* $\mathbb{C}$*).*

Corollaire 7.6.1 *Pour tout* $\beta \in \mathscr{B}$*, les variétés* Y_β *et* Z_β *sont lisses et le morphisme* $p_\beta : Y_\beta \to Z_\beta$ *est une fibration localement triviale de fibre (en chaque point) un espace affine. Cela reste vrai si l'on remplace* Y_β *et* Z_β *par* Y_β^{ss} *et* Z_β^{ss}*.*

7.4.1 Lien avec les strates

Proposition 7.7 ([Kir, th. 13.5]) *Pour tout* $\beta \in \mathscr{B}$*, on a :*

i) $S_\beta = G.Y_\beta^{ss}$ *;*

ii) le morphisme $G \times_{P_\beta} Y_\beta^{ss} \to S_\beta$*,* $(g, y) \bmod \sim \mapsto g.y$ *est un isomorphisme.*

8 Application à la cohomologie du quotient

Les stratifications ci-dessus permettent de ramener le calcul de la cohomologie d'un quotient à un calcul de cohomologie de quotients de variétés de dimensions strictement plus petites.

Nous allons seulement considérer l'exemple où $X = (\mathbb{P}^1)^n \subseteq \mathbb{P}\left((\mathbb{C}^2)^{\otimes n}\right)$ est muni de l'action diagonale de $G = \mathrm{SL}_2$. On pose T le tore des matrices diagonales de SL_2. Soit α le caractère de T défini par :

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \mapsto t \ .$$

Dans ce cas, $X^*(T) = \mathbb{Z}\alpha$ et $M(T) = \mathbb{Q}\alpha$.

On choisit la norme sur $M(G)$ telle que $||r\alpha|| = |r|$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et on choisit pour chambre dominante le cône $\mathbb{Q}_{\geq 0}\alpha$. Les poids de T sur l'espace $\mathbb{C}^2$ sont $\pm\alpha$ donc les poids T sur l'espace $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ sont de la forme :

$$(2k - n)\alpha,\ 0 \leq k \leq n \ .$$

En particulier, l'ensemble des combinaisons minimales de poids (qui indexent les strates) est :

$$\mathcal{B} := \{(2k-n)\alpha \ : \ \frac{n}{2} < k \leq n\} \cup \{0\} \ .$$

Soient $x = (x_1, ..., x_n) \in X$ et $0 \neq v \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ tel que $x = [v]$ dans $\mathbb{P}((\mathbb{C}^2)^{\otimes n})$. Les poids des composantes de v pour l'action de T sont de la forme :

$$(2l-n)\alpha, \ r \leq l \leq n-s$$

où r est le nombre de x_i égaux à 0 et s celui des x_i égaux à ∞.

On en déduit que si $\beta = (2k-n)\alpha$, $\frac{n}{2} < k \leq n$, alors avec les notations de la partie précédente :

$$Y_\beta = \{(x_1, ..., x_n) \in X \ : \ \text{exactement } k \ x_i \text{ sont égaux à } 0\}$$

et Z_β est l'ensemble des $\binom{n}{k}$ points de X dont k coordonnées sont égales à 0 et $n-k$ à ∞.

Dans cet exemple, on a $Z_\beta = Z_\beta^{ss}$ et donc $Y_\beta = Y_\beta^{ss}$.

On a aussi : $P_\beta = B := \{\begin{pmatrix} t & a \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \ : \ t \in \mathbb{C}^*, a \in \mathbb{C}\}$.

Donc $S_\beta \simeq G \times_B Y_\beta$.

On peut vérifier que X, les strates S_β et l'isomorphisme ci-dessus ont encore un sens en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\overline{\mathbb{F}_p}$ et que tout est défini sur $\mathbb{F}_q$ pour tout q puissance de p.

En remarquant que $G/B \simeq \mathbb{P}^1$, on peut donc compter les points :

$$|X^{ss}(\mathbb{F}_q)| = |X(\mathbb{F}_q)| - \sum_{\frac{n}{2} < k \leq n} |S_{(2k-n)\alpha}|$$

$$= |\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)|^n - \sum_{\frac{n}{2} < k \leq n} |\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)||Y_{(2k-n)\alpha}|$$

$$= (q+1)^n - \sum_{\frac{n}{2} < k \leq n} (q+1)\binom{n}{k} q^{n-k} \ .$$

Lorsque n est impair, on trouve :

$$|X//G(\mathbb{F}_q)| = |X^s/G(\mathbb{F}_q)| = \frac{|X^{ss}(\mathbb{F}_q)}{|\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)|}$$

car sur $X^s = X^{ss}$ les orbites de SL_2 sont en fait des orbites de PGL_2, qui agit librement.

D'où :

$$|X//G(\mathbb{F}_q)| = \frac{(q+1)^n - \sum_{\frac{n}{2}<k\leq n}(q+1)\binom{n}{k}q^{n-k}}{q(q-1)(q+1)}$$

$$= \frac{(q+1)^{n-1} - \sum_{\frac{n}{2}<k\leq n}\binom{n}{k}q^{n-k}}{q(q-1)}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}q^{n-k-1} - \sum_{\frac{n}{2}<k\leq n}\binom{n}{k}q^{n-k-1}}{q-1}$$

$$= \frac{\sum_{1\leq k<\frac{n}{2}}\binom{n-1}{k-1}q^{n-k-1} + \sum_{\frac{n}{2}<k\leq n}\left(\binom{n-1}{k-1} - \binom{n}{k}\right)q^{n-k-1}}{q-1}$$

$$= \frac{\sum_{1\leq k<\frac{n}{2}}\binom{n-1}{k-1}q^{n-k-1} - \sum_{\frac{n}{2}<k\leq n}\binom{n-1}{k}q^{n-k-1}}{q-1}$$

$$= \frac{\sum_{1\leq k<\frac{n}{2}}\binom{n-1}{k-1}q^{n-k-1} - \sum_{1\leq k<\frac{n}{2}}\binom{n-1}{k-1}q^{k-1}}{q-1}$$

$$= \sum_{1\leq k<\frac{n}{2}}\binom{n-1}{k-1}q^{k-1}\frac{q^{n-2k}-1}{q-1}$$

$$= \sum_{1\leq k<\frac{n}{2}}\binom{n-1}{k-1}(1+q+...+q^{n-2k-1}) \ .$$

Or on trouve dans [Gro, formules (22) et (25)] et [Del, cor. 3.3.6 et rem. 3.3.11] le résultat suivant :

Théorème 8.1 (formule de Lefschetz généralisée et pureté du Frobenius) *Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini de cardinal q. Si X est une variété projective rationnellement lisse définie sur $\mathbb{Z}$, alors il existe des nombres complexes $\alpha_1, ..., \alpha_r$, $\beta_1, ..., \beta_s$ tels que $\beta_j \neq \alpha_i$ pour tous i, j et pour tout n :*

$$|X(\mathbb{F}_{q^n})| = \sum_i \alpha_i^n - \sum_j \beta_j^n$$

de plus, chaque $|\alpha_i|$ (resp. $|\beta_j|$) est de la forme q^{n_i} (resp. $|q^{n_j+\frac{1}{2}}|$) pour certains entiers n_i (resp. n_j). Enfin pour tout k, le $2k-$ième nombre de Betti de $X(\mathbb{C})$ (resp. le $(2k+1)-$ième) est égal au nombre de α_i de module q^k (resp. de β_j de module $q^{k+\frac{1}{2}}$).

Remarque : Cela s'applique à $X//G$ en effet, si X est lisse et G réductif, $X//G$ est rationnellement lisse (pour ce résultat et aussi pour une définition de « rationellement lisse » *cf.* [Bout]).

Dans notre cas, on en déduit que pour n impair, les nombres de Betti de la variété des n points ordonnés sur la droite projctive : $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})^n//\mathrm{SL}_2$ sont :

$$b_{2i} = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n-j-3}{2}} \binom{n-1}{k}$$

et les nombres de Betti impairs sont nuls.

Pour le cas où n est pair on a besoin de désingulariser (*cf.* [MFK, chap. 8 §7])

Références

[BB] A. BIALYNICKI-BIRULA, *Some theorems on actions of algebraic groups*, Ann. of Math. (2) 98 pp. 480-497, 1973.

[Bou] BOURBAKI, *Algèbre commutative.*

[Bout] J.-F. BOUTOT, *Singularités rationnelles et quotients par les groupes réductifs*, Inventiones 88, pp. 65-68, 1987.

[Br-Mon] M. BRION, *Invariants et coriants des groupes réductifs*, notes de l'cole d't de Monastir (juillet-août 1996), disponibles http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/m̃brion/notes.html

[Danilov] V. I. DANILOV, *Algebraic varieties and schemes*, Encycl. math. sci. 23, Springer, 1994.

[Gro] A. GROTHENDIECK, *Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L*, Séminaire Bourbaki, Vol. 9, Exp. No. 279, 41–55, Soc. Math. France, Paris, 1995.

[Del] P. DELIGNE, *La conjecture de Weil II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 52, pp. 137–252, 1980.

[Hesselink] Wim H. HESSELINK *Uniform instability in reductive groups*, J. Reine Angew. Math. 303/304 , pp. 74–96 (1978).

[Kempf] G. R. KEMPF, *Instability in invariant theory*, Annals of math., vol 108, no 2, pp. 299-316, 1978.

[Kir] F. KIRWAN, *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Mathematical Notes, 31. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1984.

[MFK] D. MUMFORD, J. FOGARTY, F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, 3−ème édition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin, 1994.