Slices Etales

1 Préliminaire

1.1 Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et X une variété affine sur $\mathbb{K}$. On suppose que l'algèbre de affine $\mathbb{K}[X]$ est une algèbre de type finie non nécessairement intègre ni réduite.
Soit G un groupe réductif, i.e., un groupe algébrique affine dont le radical unipotent est réduit à l'élément neutre. On suppose que G opère sur X morphiquement, i.e., l'action $\sigma : G \times X \longrightarrow X;\ (g, x) \mapsto g.x$ est un morphisme de variétés.

Fait 1.1. *Sous l'hypothèse ci-dessus, on a*

1. $\mathbb{K}[X]^G \subset \mathbb{K}[X]$ *est un type fini sur* $\mathbb{K}$.
   $\rightarrow$ *On peut définir un quotient 'X/G': la variété affine* $\mathbb{K}[`X/G'] = \mathbb{K}[X]^G$.
   L'inclusion $\mathbb{K}[X]^G \hookrightarrow \mathbb{K}[X]$ *induit un morphisme* $\pi_X : X \to `X/G'$.
2. *Pour tout idèal* $\mathfrak{b}$ *de* $\mathbb{K}[X]^G$, *on a* $(\mathbb{K}[X]\mathfrak{b})^G = \mathfrak{b}$. $\rightarrow$ π_X*: surjectif.*
3. $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subset \mathbb{K}[X]$ *idéals* G*-stables tels que* $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = \mathbb{K}[X]$.
   Alors, on a $\mathfrak{a}_1^G + \mathfrak{a}_2^G = \mathbb{K}[X]^G$.
   $\rightarrow$ *Les invariants séparent les fermés* G*-stables disjoints.*

Soit $\xi \in `X/G'$.
Par 2., $\pi_x^{-1}(\xi)$ est non-vide, fermé et G-stable. Donc, toute orbite de dimension minimale dans $\pi_X^{-1}(\xi)$ est fermée dans X.
Par 3., $\pi_x^{-1}(\xi)$ contient unique orbite fermée, que l'on note par $T(\xi)$.
En particulier, pour tout $x \in \pi_X^{-1}(\xi)$, on a $\overline{G(x)} \supset T(\xi)$, ce qui signifie que '$X/G'$ paramètre les G-orbites fermées de X.

Remarque 1.1. 1. *Le quotient 'X/G' est un* ***quotient catégorique****, i.e., pour tout morphisme* $\psi : X \to Z$ *tel que* $\psi \circ \sigma = \psi \circ \mathrm{pr}_2$, *où* $\mathrm{pr}_2 : G \times X \to X$ *est la projection canonique, il existe un seul morphisme* $\chi : `X/G' \to Z$ *tel que* $\psi = \chi \circ \pi_X$.

2. *Comme on suppose que* car.$\mathbb{K} = 0$, *ce quotient* $Y := `X/G'$ *est universel, i.e., pour tout morphisme* $Y' \to Y$, Y' *est le quotient catégorique de* $X' := X \times_Y Y'$ *par* G.
Pour cette raison, on souvent écrit $X//G$ *au lieu de 'X/G'.*

D'ici, on écrit X/G au lieu de 'X/G'. Pour le détail, voir [Mum].
Soient Y une autre G-variété affine et $\varphi : X \longrightarrow Y$ un G-morphisme. Il induit le moprhisme $\varphi/G : X/G \longrightarrow Y/G$ tel que $\pi_Y \circ \varphi = (\varphi/G) \circ \pi_X$.

1.2 Théorème de Matsushima (松島)

Soit X une variété affine sur laquelle un groupe réductif G opère. Soit $x \in X$ un point.

Proposition 1.1. *Si l'orbite $G(x)$ est fermée, le groupe d'isotropie G_x est réductif.*

Ici, on montrera cette proposition, en admettant le lemma suivant:

Lemme 1.2. *Soit G un groupe réductif et $D \subset G$ un sous-groupe algébrique, isomorphe au groupe additif $\mathbb{G}_a \cong \mathbb{K}$. Alors, il existe un sous-groupe algébrique simple $S \subset G$ de dimension 3, qui contient D.*

(On remarque que S est isomorphe à $SL(2, \mathbb{K})$ ou $PSL(2, \mathbb{K})$.) Ceci est une conséquence du **Lemme de Jacobson-Morozov**:

> Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Soit $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent. Alors, il existe un morphisme d'algèbres de Lie $\varphi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathfrak{g}$ tel que $\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = x$.

Remarque 1.2. *Le lemme de Jacobson-Morozov est valable pour un corps de caractéristique $> 3(h-1)$, où h est le numéro de Coxeter.*

<u>Démonstration</u>(de Prop.) On sait qu'il existe un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ tel que

1. G opère sur M linéairement,
2. $\exists X \hookrightarrow M$: immersion fermée G-équivariante.

(Voir, e.g., [Bo], pour la démonstration.) Donc, il suffit de démontrer pour une représentation linéaire $G \hookrightarrow GL(M)$.
Supposons que le radical unipotent $R_x \subset G_x$ est non-trivial. Alors, il existe un sous-groupe $D \subset R_x$ algébrique tel que $D \cong \mathbb{G}_a$. Par le Lemme 1.2, il existe un sous-groupe algébrique simple $S \subset G$ de dimension 3 qui contient D.
Soit $\varphi : SL(2, \mathbb{K}) \longrightarrow S$ un isomorphisme ou un revêtement à deux-feuillle tel que

$$\varphi\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \beta \in \mathbb{K} \right\}\right) = D.$$

On décompose M en une somme directe

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i, \qquad M_i = \left\{ m \in M \middle| \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} .m = \alpha^i m \right\}.$$

Soit $x = \sum_i x_i \in M$ la décomposition de x suivant les M_i. Comme $D \subset G_x$, i.e., $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .x = x$, on a $x_i = 0$ pour $i < 0$. Posons

$$T := \varphi\left(\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{K}^* \right\}\right).$$

Par définition, on a $T(x) = \{\sum_{i\geq 0} \alpha^i x_i | \alpha \in \mathbb{K}^*\}$ qui implique $x_0 \in \overline{T(x)}$. Comme $G(x)$ est supposé d'être fermée, on voit que $x_0 \in G(x)$. Par définition, on a $T \subset G_{x_0}$. Différentiant $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.x = x$, on obtient $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.x = 0$, en particulier, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.x_0 = 0$, i.e., $D \subset G_{x_0}$. Ceci implique que $\mathbb{K}x_0$ est un module trivial sur $SL(2,\mathbb{K})$, i.e., $S \subset G_{x_0}$. L'ensemble $U := \{sx_0 | s \in G \text{ t.q. } \dim(S \cap R_{sx_0}) = 0\}$ est un voisinage de x_0 dans $G(x_0) = G(x)$. Comme, $x_0 \in \overline{T(x)}$, il existe $t \in T$ tel que $tx \in U$, i.e., $\dim(S \cap R_{tx}) = 0$. Mais, T normalise D, i.e., $D = tDt^{-1} \subset tR_x t^{-1} = R_{tx}$, ce qui est absurde ! $\square$

1.3 Fibrés

Ici, on rappelle la définition du système fibré au sens étale. La référence fondamentale est [Ser].

A la topologie algébrique, par exemple, un revêtement non-ramifié ou un espace homogène ne sont pas localement trivial, donc, ils ne sont des espaces fibrés dans le sens de A. Weil. C'est la raison pour laquelle on veut généraliser la notion de 'espaces fibrés', comme ci-dessous.

Soit X, Y variétés algébriques et $\pi : Y \to X$ un morphisme de variétés algébqirues.

Définition 1.1. *Y est un **revêtement** de X, s'il existe un recouvrement ouvert affine $\{X_i\}$ de X tel que, pour tout i, 1) $Y_i := \pi^{-1}(X_i)$ soit affine et que 2) $\mathbb{K}[Y_i]$ soit un $\mathbb{K}[X_i]$-module de type fini.*

C'est équivalent de dire que π est un morphisme propre et que les fibres sont finies. On désigne le faisceau structural de X (resp. Y) par $\mathcal{O}_X$ (resp. $\mathcal{O}_Y$).

Définition 1.2. *Soit $\pi : Y \to X$ est un revêtement.*

1. *π est **non-ramifié** en y, un point ayant pour l'image $x = \pi(y)$, si l'homomorphisme $\widehat{\pi} : \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ est un isomorphisme. (Ici, $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ (resp. $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$) est la complétion de l'anneau des germes $\mathcal{O}_{X,x}$ (resp. $\mathcal{O}_{Y,y}$) par les puissances de son idéal maximal.)*

2. *π est **non-ramifié** en $x \in X$ si π est non-ramifié en tout point dans la fibre $\pi^{-1}(x) \subset Y$.*

3. *π est **non-ramifié** s'il est non-ramifié en tout point.*

Soit P une variété algébrique sur laquelle un groupe algébrique G opère à droite. Soit X une autre variété algébrique et $\pi : P \to X$ un morphisme.

Définition 1.3.

1. *(G, P, X) est un **système fibré** si $\pi(x.g) = \pi(x)$ pour tout $x \in P$ et $g \in G$.*

2. *(G, P, X) est **isotrivial** (ou trivial au sens étale) s'il existe un revêtement non-ramifié $f : X' \to X$ tel que $f^*P = X' \times_X P$ est trivial.*

3. *(G, P, X) est **localement isotrivial** si tout $x \in X$ possède un voisinage U au-dessus duquel P est isotrivial. Un système fibré (G, P, X) est aussi applelé un **espace fibré principal de base** X **et de groupe** G.*

Remarque 1.3. *Soit (G, P, X) un système fibré. Pour qu'il soit localement isotrivial, il faut et il suffit que le système satisfasse les conditions suivantes:*

1. *G opère sur P librement,*

2. *Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $U \subset X$ de x, un revêtement non-ramifié $f : U' \to U$ et un morphisme $s : U' \to P$ tels que $\pi \circ s = f$.*

Voici des exemples:

Exemple 1.1. 1. *Soit X une variété algébrique sur laquelle un groupe fini G opère sans points fixé, i.e., $G_x = \{e\}$ pour tout $x \in X$. Alors, $X \to X/G$ est un revêtement non-ramifié et localement isotrivial. En faite, on a $X \times_{X/G} X \cong G \times X$.*

2. *Soient G un groupe algébrique et $H \subset G$ un sous-groupe algébrique fermé. Alors, $(H, G, G/H)$ est un espace principal de base $X = G/H$ et de groupe H. En faite, soit G^0 le composante connexe de l'élément neutre de G et $H^0 = G^0 \cap H$, et $X^0 := G^0/H^0$. Alors, les variétés G^0 et X^0 sont irréductibles, et X^0 est la composante connexe de l'élément origine de X. On sait que l'extension $\mathbb{K}(G^0)/\mathbb{K}(X^0)$ des corps de fonctions rationelles est séparable; il s'ensuit qu'il existe une sous-variété irréductible Y de G^0, de même dimension que X, et telle que la projection $Y \to X^0$ définisse une extension finie séparable. Donc, il existe un ouvert non vide $U \subset X$ dont l'image réciproque $V \subset Y$ constitue un revêtement non-ramifié. La deuxième propriété de la Remarque 1.3 est satisfaite au-dessus de U. Par translation, on en déduit qu'elle est vérifiée partout.*

Soit Y une variété affine sur laquelle un groupe réductif H opère. Soit G un groupe réductif qui contient H comme un sous-groupe algébrique. Le groupe H opère à droite sur $G \times Y$ par $(g, y).h = (gh, h^{-1}.y)$. On note le quotient de $G \times Y/H$ par $G \times^H Y$.

Lemme 1.3. *SoitX' une sous-variété fermée G-stable de $X = G \times^H Y$. Alors, il existe une sous-variété fermée Y' H-stable telle que $X' \cong G \times^H Y'$.*

<u>Démonstration</u> Soient $\mathfrak{a}' \subset (\mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[Y])^H$ l'idéal associé à X' et $\mathfrak{a} \subset \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[Y]$ l'idéal engendré par $\mathfrak{a}'$. Soit $\mathfrak{b} \subset \mathbb{K}[Y]$ l'idéal des $f \in \mathbb{K}[Y]$ tel que $1 \otimes f \in \mathfrak{a}$. Comme $1 \otimes \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap 1 \otimes \mathbb{K}[Y]$, on a 1) $H.\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}$, 2) $\mathfrak{a} = \mathbb{K}[G] \otimes \mathfrak{b}$.
Soit $Y' \subset Y$ la sous-variété affine telle que $\mathbb{K}[Y'] = \mathbb{K}[Y]/\mathfrak{b}$. Par définition, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} = \mathbb{K}[G] \otimes \mathfrak{b} \longrightarrow \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[Y] \longrightarrow \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[Y'] \longrightarrow 0.$$

Comme H est réductif, le foncteur $(\cdot)^H$ est exacte, i.e., on obtient la suite exacte suivante:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a}^H = \mathfrak{a}' \longrightarrow (\mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[Y])^H \longrightarrow (\mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[Y'])^H \longrightarrow 0,$$

i.e. $X' \cong G \times^H Y'$. □

2 Slices Etales

2.1 Etales G-morphismes

Le lemme suivant est une étape essentielle:

Lemme 2.1 (FONDAMENTAL)**.** *Soient X, Y variétés affines sur lesquelles un groupe réductif G opère et $\varphi : X \longrightarrow Y$ un G-morphisme. Soit $x \in X$ un point tel que*

1. φ: étale en x, 2. *X: normale en x ou Y: normale en y,*

3. $G(x), G(\varphi(x))$: fermées, 4. *$\varphi|_{G(x)}$: injective.*

Alors, il existe un ouvert affine $U \subset X$ tel que

I) $x \in U$ et U: saturé pour π_X, II) $\varphi|_U$ et $\varphi/G|_{\pi_X(U)}$: étales,

III) $V := \varphi(U) \subset Y$: un ouvert affine, saturé pour π_Y,

IV) $\varphi|_U : U \to V$ et $\pi_X|_U : U \twoheadrightarrow U/G$ induisent un G-isom. $\chi : U \cong V \times_{V/G} U/G$.

Démonstration La démonstration demande plusieurs préparations. Ici, on va indiquer chaque étape, brièvement:
1^{er} étape: On peut supposer $i)$ X, Y: normales et $ii)$ les fibres de φ sont finies.
(La normalité est une condition ouverte.)
$2^{\text{ème}}$ étape: Soient A la fermeture intégrale de $\mathbb{K}[Y]$ dans $\mathbb{K}[X]$ et $\widetilde{X}$ la variété affine telle que $\mathbb{K}[\widetilde{X}] = A$. On a $i)$ $\widetilde{X}$ est une G-variété normale, $ii)$ la relation $\mathbb{K}[X] \supset \mathbb{K}[\widetilde{X}] \hookleftarrow \mathbb{K}[Y]$ induit $X \hookrightarrow \widetilde{X} \to Y$, où le premier morphisme est une G-immersion ouverte et le deuxième morphisme est un G-morphisme fini. (C'est la version G-équivariante du théorème principal de Zariski.) En particulier, il implique que

1. il existe $f \in \mathbb{K}[\widetilde{X}]^G \subset \mathbb{K}[X]^G$ telle que

   i. $\widetilde{X}_f = X_f \subset X$, ii. $\pi_X(x) \in (\widetilde{X}/G)_f \cong (X/G)_f$: irréductibles,
   iii. $\varphi|_{X_f}$ et $\varphi/G|_{(X/G)_f}$ sont étales,

   et que

2. il existe $g \in \mathbb{K}[Y]^G$ telle que $G(\varphi(x)) \subset Y_g \subset \varphi(X_f)$.

$3^{\text{ème}}$ étape: On pose $U := X_f \cap \varphi^{-1}(Y_g)$ et $V := Y_g$. Alors, il est facile de vérifier I) $-$ III) de ce lemme et que $\varphi|_U : U \to V$ envoie les orbites fermées de U sur des orbites fermées de V, ce qui signifie que χ est fini.
$4^{\text{ème}}$ étape: Comme $\varphi = (\mathrm{id} \times \varphi/G) \circ \chi$, on en déduit que χ est étale, en particulier, χ est un revêtement. Par la $4^{\text{ème}}$ hypothèse de ce lemme et la $2^{\text{ème}}$ proporiété de f, on voit que χ est un revêtement à une feuille, i.e., un isomorphisme. □

Le lemme suivant est technical, mais il sera utilisé:

Lemme 2.2. *Soient X, Y variétés affines sur lesquelles un groupe réductif G opère. Soient $Y' \subset Y$ une sous-G-variété fermée et $\varphi : X \to Y$ un G-morphisme. On pose $X' := Y' \times_Y X$ et $\varphi' := \mathrm{id}_Y \times \varphi : X' = Y' \times_Y X \to Y' \times_Y Y = Y'$. On suppose* *i) φ et φ/G: étales,* *ii) $X \to Y \times_{Y/G} X/G$: un G-isom.*

Alors, on a

I) φ' et φ'/G: étales, *II) $X' \to Y' \times_{Y'/G} X'/G$: un G-isom.*

Démonstration Il est clair que φ' est étale. Par *ii*), on a $X' = Y' \times_Y X \cong Y' \times_Y (Y \times_{Y/G} X/G) \cong Y' \times_{Y/G} X/G$. Alors, on a

1. $\varphi'/G = \mathrm{id}_{Y'/G} \times \varphi/G : X'/G \cong Y'/G \times_{Y/G} X/G \to Y'/G \times_{Y/G} Y/G = Y'/G$: étale,
2. $X' \cong Y' \times_{Y/G} X/G \cong Y' \times_{Y'/G} (Y'/G \times_{Y/G} X/G) \cong Y' \times_{Y'/G} X'/G$. □

2.2 Slices Etales

Soient G un groupe réductif qui opère sur une variété affine X et $x \in X$ un point.

Lemme 2.3. *On suppose que i) X: lisse en x, ii) G_x: réductif. Alors, il existe un morphisme de variétés $\varphi : X \to T_x X$ tel que*

I) φ: G_x-équivariant, II) φ: étale, III) $\varphi(x) = 0$.

Démonstration Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal correspondant à x. La projection canonique $d : \mathfrak{m} \twoheadrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong T_x^* X$ est G_x-équivariante. *ii*) implique que le G_x-module $\mathbb{K}[X]$ est semi-simple, donc il existe $W \subset \mathfrak{m}$ un sous G_x-module tel que $d|_W : W \cong (T_x X)^*$. On prolonge $(d|_W)^{-1}$ en un homomorphisme de l'algèbre $S^\bullet((T_x X)^*) = \mathbb{K}[T_x X]$ dans $\mathbb{K}[X]$. Alors, le morphisme $\varphi : X \to T_x X$ qui lui correspond vérifie $I) - III)$. □

Voici, le théorème principal due à D. Luna [Lu]:

Théorème 2.4 (Slices Etales)**.** *Soit X une variété affine sur laquelle un groupe réductif G opère. Soit $x \in X$ est un point dont l'orbite $G(x)$ est fermée.*
Alors, il existe une sous-variété affine $V \subset X$ telle que

i) $x \in V$, *ii) V: G_x-stable,*

iii) l'action de G sur X induit un G-morphisme étale $\psi : G \times^{G_x} V \to X$,

iv) $U := \mathrm{Im}\psi \subset X$: un ouvert affine, π_X-saturé,

v) $\psi/G : (G \times^{G_x} V)/G \cong V/G_x \to U/G$: étale,

vi) les morphismes ψ et $\pi_{G \times^{G_x} V} : G \times^{G_x} V \to (G \times^{G_x} V)/G \cong V/G_x$ induisent un G-morphisme $G \times^{G_x} V \cong U \times_{U/G} V/G_x$.

On appele V un ***slice étale*** *en x.*

Démonstration On considère deux cas differément:
A) Supposons que X est lisse en x. Par hypothèse ($G(x)$ est fermée), G_x est réductif par le Théorème de 松島 (Prop. 1.1), ce qui implique que, par Lemme 2.3, il existe un morphisme $\varphi : X \to T_x X$ tel que

i) φ: G_x-équivariante, ii) ϕ: étale en x, iii) $\varphi(x) = 0$.

Choisissons $N \subset T_xX$ un supplémentaire de $T_xG(x)$, qui est G_x-stable.
On pose $V := \varphi^{-1}(N)$. Alors, on voit que $V \subset X$ est une sous-variété fermée telle que

i) $x \in V$, ii) V: lisse en x, iii) V: G_x-stable.

L'action $\sigma : G \times X \to X$; $(g,x) \mapsto g.x$ induit un G-morphisme $G \times^{G_x} V \to X$ qui est étale en $[e;x]_{G_x}$. D'après le Lemme fondamental 2.1, on en déduit le théorème.
B) Dans le cas générale, identifions X à une sous-G-variété fermée d'une G-variété affine lisse, e.g., un G-module. Alors, A), le Lemme 1.3 et le Lemme 2.2 implique le théorème. $\square$

Remarque 2.1. *Pour le théorème de slices étales au cas* car.$\mathbb{K} > 0$*, voir Bardsley P. et Richardson R. W., Étales Slices for Algebraic Transformation Groups in Characteristic p, Proc. London Math. Soc. (3),* **51**, *(1985), 295–317.*

2.3 Exemple

Soient G un groupe algébrique simple et connexe sur $\mathbb{C}$, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan et W le groupe de Weyl relative à $\mathfrak{h}$.

Fait 2.1. 1. *Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, il existe unique $x_s \in \mathfrak{g}$: semi-simple et unique $x_n \in \mathfrak{g}$: nilpotent tels que $x = x_s + x_n$ et $[x_s, x_n] = 0$.*
(Décomposition de Jordan-Chavelley)

2. *Soit $x \in \mathfrak{g}$. Alors, $G(x)$ est fermée si et s.si $x \in \mathfrak{g}_{s.s} := \{x \in \mathfrak{g} | x_n = 0\}$.*
($\mathfrak{g}_{s.s} \subset \mathfrak{g}$ est un ouvert.)

3. *Pour tout $x \in \mathfrak{g}_{s,s}$, il existe $h \in \mathfrak{h}$ tel que $x \in G(h)$.*

Le théorème de Chevalley $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$ induit un isomorphisme de variétés $\mathfrak{g}/G \cong \mathfrak{h}/W$. En composant ce morphisme avec le quotient canonique $\mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}/G$, on définit:

Définition 2.1. *Le **quotient adjoint** $\chi : \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{h}/W$ est le composé de $\mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}/G$; $x = x_s + x_n \mapsto G.x_s$ et $\mathfrak{g}/G \cong \mathfrak{h}/W$; $G.x_s \mapsto G.x_s \cap \mathfrak{h}$, où $x = x_s + x_n$ désigne la décomposition de Jordan-Chevalley.*

Remarquons que $\chi^{-1}(0) = \mathcal{N} = \{x \in \mathfrak{g} | x_s = 0\}$ est le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$.

Définition 2.2. *$x \in \mathfrak{g}$ est **régulier**, si $\dim Z_{\mathfrak{g}}(x)$ est minimale, i.e., égale à* $\mathrm{rg}\mathfrak{g}$.

On pose $\mathfrak{g}^{reg} := \{x \in \mathfrak{g} | \dim Z_{\mathfrak{g}}(x) = \mathrm{rg}\mathfrak{g}\}$, $\mathfrak{g}^{reg}_{s.s} := \mathfrak{g}^{reg} \cap \mathfrak{g}_{s.s}$, $\mathfrak{h}^{reg} := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^{reg}$. Soit $x \in \mathfrak{h}^{reg}$. Alors, $G(x)$ est fermée et $G_x = H = T$ (H: un sous groupe de Cartan, T: un tore maximal). Alors, par le Théorème 2.4, on sait qu'il existe un slice étale V en x. En faite, $V = \mathfrak{h}^{reg}$, $\psi : G \times^H V \to \mathfrak{g}$; $[g;x]_H \mapsto (\mathrm{Ad}g)(x)$ et $U = \mathrm{Im}\psi = \mathfrak{g}^{reg}_{s.s}$ satisfont les conditions du théorème. En particulier, il existe un G-isomorphime

$$G \times^H \mathfrak{h}^{reg} \longrightarrow \mathfrak{g}^{reg}_{s.s} \times_{\mathfrak{g}^{reg}_{s.s}/G} \mathfrak{h}^{reg} \cong \mathfrak{g}^{reg}_{s.s} \times_{\mathfrak{h}^{reg}/W} \mathfrak{h}^{reg}.$$

Donc, $\psi : G \times^H \mathfrak{h}^{reg} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}^{reg}_{s.s}$ est un revêtement de $|W|$-feuilles.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[Bo] Borel A., *Linear Algebraic Groups*, Second Edition, Springer Grad. Texts in Math. **126**, 1991.

[Lu] Luna D., *Slices étales*, Bull. Soc. Math. France, Mém. **33**, (1979), 81–105.

[Mum] Mumford D., Forgarty J. and Kirwan F., *Geometric Invariant Theory*, Third Enlarged Edition, Ergeb. der Math. und ihrer Grenz. **34**, Springer-Verlag, 1994.

[Ser] Serre J.P., *Espaces fibrés algébriques*, Séminaire C. Chevalley t. **3**, (1958), 1–37.