GT Lie/symplectique: automne 2008
Exposé 8 (S.P.)

Moment et convexité.

Rappel kaehlerien

On utilise l'identification usuelle:

$$\mathbf{R}^{2n} \simeq \mathbf{C}^n : (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \mapsto (\ldots, z_j = x_j + iy_j, \ldots).$$

Une structure (presque) complexe sur une variété réelle X est un automorphisme du fibré tangent

$$J : TX \to TX$$

tel que $J^2 = -Id$.

Exemple: sur l'ouvert $U \subset \mathbf{R}^{2n}$

$$J_0(\frac{\partial}{\partial x_j}) = -\frac{\partial}{\partial y_j}, \quad J_0(\frac{\partial}{\partial y_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Un espace topologique X est une variété complexe de cartes $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ si

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{(recouvrement par des ouverts)},$$

les applications

$$\phi_i : U_i \to \phi_i(U_i) \subset \mathbf{C}^n,\ i \in I$$

sont des homéomorphismes, ces cartes étant telles que pour $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ les fonctions de transition

$$\phi_{i,j} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j) : u \mapsto \phi_j \circ \phi_i^{-1}(u))$$

sont holomorphes i.e.

$$J_0 \circ d\phi_{ij} = d\phi_{ij} \circ J_0.$$

Toute variété complexe X admet (comme variété réelle) une structure complexe naturelle J: il suffit de poser

$$J|_{U_i} = d(\phi_i^{-1}) \circ J_0 \circ d\phi_i, \quad i \in I$$

et d'observer que la condition d'holomorphie des cartes équivaut à

$$J_{|U_i} = J_{|U_j} \quad \text{sur } U_i \cap U_j.$$

On note $\Omega(X)$ les formes différentielles sur la variété complexe X à valeurs dans $\mathbf{C}$. Une $2-$ forme $\omega \in \Omega^2(X)$ est dite de *Kaehler* si elle est symplectique (i.e. réelle, non dégénérée, fermée) et $J-$ compatible i.e.

$$g(Z, Z') := \omega(Z, JZ') \text{ est une métrique riemanienne sur } X$$

ce qui équivaut à

$$\omega(Z,Z')=\omega(JZ,JZ'),\quad \omega(Z,JZ)>0,\quad Z,Z'\in TX,\ Z\neq 0.$$

Soit
$$\omega_{|U}=\sum_{i<j}a_{ij}\,dz_i\wedge dz_j+\sum_{i,j}b_{ij}\,dz_i\wedge d\overline{z}_j+\sum_{i<j}c_{ij}\,d\overline{z}_i\wedge d\overline{z}_j$$

l'expression de la $2-$ forme ω dans la carte complexe (U,ϕ).
ω est de Kaehler ssi dans toute carte complexe (U,ϕ),

$$\omega_{|U}=\frac{i}{2}\sum_{i,j}h_{ij}\,dz_i\wedge d\overline{z}_j$$

où $(h_{ij}((u))$, $u\in U$ est hermitienne définie positive et

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial z_k}=\frac{\partial h_{kj}}{\partial z_i},\qquad \frac{\partial h_{ij}}{\partial \overline{z}_k}=\frac{\partial h_{ik}}{\partial \overline{z}_j}.$$

On appelle potentiel kaehlerien toute application lisse $f:U\to\mathbf{R}$ telle que

$$h_{ij}(u)=\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}(u),\ u\in U$$

i.e. telle que
$$\omega=\frac{i}{2}(\partial\,\overline{\partial}\,f).$$

Localement, toute forme de Kaehler dérive d'un potentiel.

Voici trois exemples (simples) qui interviennent ici:
la structure symplectique standard sur $\mathbf{C}^n$:

$$\omega_{standard}=\sum_j dx_j\wedge dy_j=\frac{i}{2}\sum_j dz_j\wedge d\overline{z}_j=\frac{i}{2}\partial\,\overline{\partial}(\sum_j z_j\overline{z}_j)$$

la structure de Fubini-Study sur $\mathbf{C}^n$:

$$\omega_{fs}=\frac{i}{2}\partial\,\overline{\partial}\left(ln(\sum_j z_j\overline{z}_j+1)\right).$$

Pour $n=1$,
$$\omega_{fs}(z)=\frac{i}{2}\frac{1}{(1+z\overline{z})^2}\,dz\wedge d\overline{z}=\frac{1}{(1+(x^2+y^2))^2}\,dx\wedge dy.$$

la structure de Fubini-Study sur le projectif complexe: $P_n\mathbf{C}$ est le quotient $(\mathbf{C}^{n+1})^\times/\mathbf{C}^\times$ pour l'action

$$\mathbf{C}^\times\times(\mathbf{C}^{n+1})^\times\to(\mathbf{C}^{n+1})^\times:(z,(z_0,\ldots,z_n))\mapsto(zz_0,\ldots,zz_n)$$

Le passage au quotient (i.e. aux coordonnées homogènes) est noté

$$p : (\mathbf{C}^{n+1})^\times \to P_n\mathbf{C} : (z_0, \ldots, z_n) \mapsto [z_0, \ldots, z_n].$$

Voici les cartes complexes usuelles: $([U_i], \phi_i), 0 \leq i \leq n$, avec

$$[U_i] = p\big(\{(z_0, \ldots, z_n), z_i \neq 0\}\big)$$
$$\phi_i : [U_i] \to \mathbf{C}^n : [z_0, \ldots, z_n] \mapsto (\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}).$$

Pour $i < j$ les fonctions de transition s'écrivent

$$\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \mathbf{C}^n \setminus \{u_{j-1} = 0\} \to \mathbf{C}^n \setminus \{u_i = 0\}$$
$$(u_0, \ldots, u_{n-1}) \mapsto (\frac{u_0}{u_{j-1}}, \ldots, \frac{u_{i-1}}{u_{j-1}}, \frac{1}{u_{j-1}}, \frac{u_i}{u_{j-1}}, \ldots, \frac{u_{j-2}}{u_{j-1}}, \frac{u_j}{u_{j-1}}, \ldots, \frac{u_{n-1}}{u_{j-1}})$$

La $2-$ forme de Fubini-Study ω_{fs} sur $\mathbf{C}^n$ satisfait

$$\phi_{ij}^\star \omega_{fs} = \omega_{fs}$$

i.e. quel que soit (i, j),

$$\phi_i^\star \omega_{fs} = \phi_j^\star \omega_{fs} \text{ sur l'ouvert } [U_i] \cap [U_j] \subset P_n\mathbf{C}.$$

La structure Kaehlerienne (dite de Fubini-Study) est alors l'unique $2-$ forme ω sur $P_n\mathbf{C}$ telle que pour tout i

$$\phi_i^\star \omega_{fs} = \omega_{|_{[U_i]}}.$$

Actions symplectiques et moments

Soit (X, ω_X) une variété symplectique, G un groupe de Lie d'algèbre de Lie g et $\phi : G \times X \to X$ une action symplectique (i.e. $\phi_g^\star \omega_X = \omega_X$ pour tout $g \in G$). Notons

$$Z^-(m) = \frac{d}{dt_{|_0}} \phi_{exptZ}(m), \quad Z \in g$$

les champs fondamentaux de ϕ.
On appelle co-moment de ϕ toute application linéaire $\overline{j} : g \to C^\infty(X) : Z \mapsto j_Z$ telle que

$$dj_Z(m) = \omega_X(Z^-(m), \cdot) \quad \text{ pour tout } m \in X.$$

L'application adjointe $j : X \to \mathbf{g}^\star$ définie par $< j(m), Z >= j_Z(m)$, $Z \in g$ est alors appelée *moment* de ϕ.
Le moment j est dit équivariant si $j(\phi_g(m)) = Ad_{g^{-1}}^\star j(m)$, $m \in X, g \in G$.

Voici un lemme utile:
Lemme I Si $\phi : G \times X \to X$ est une action symplectique avec moment $j : X \to g^\star$ et $i : H \to G$ est un sous-groupe de Lie, alors la restriction de l'action $\phi_H : H \times X \to X$ admet le moment $j_H : X \to h^\star : m \mapsto di^\star(j(m))$.

Actions symplectiques de tores (mouvements harmoniques découplés):

On considère le cercle unité S^1 de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}^{n+1}$ muni de la structure symplectique standard. L'action de tore

$$(S^1)^{n+1} \times \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}^{n+1} : \big((t_0, \ldots, t_n), (z_0, \ldots, z_n)\big) \mapsto (t_0 z_0, \ldots, t_n z_n)$$

est symplectique avec moment $j : \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{R}^{n+1}$ que l'on obtient comme suit:
l'algèbre de Lie de $(S^1)^{n+1}$ est $\mathbf{R}^{n+1}$ et le champ fondamental de $Z = (r_0, \ldots, r_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ est

$$Z^-(z_0, \ldots, z_n) = \frac{d}{dt}_{|0} (e^{itr_0} z_0, \ldots, e^{itr_n} z_n)$$

i.e.

$$Z^-(z_0, \ldots, z_n) = -\sum_j r_j y_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_j r_j x_j \frac{\partial}{\partial y_j}$$

La condition $\omega(Z^-(m), \cdot) = dj_Z(m)$ s'écrit

$$-\sum_j r_j x_j dx_j - \sum_j r_j y_j dy_j = d\, j_{(r_0,\ldots,r_n)}(z_0, \ldots, z_n).$$

En voici une solution:

$$j_{(r_0,\ldots,r_n)}(z_0, \ldots, z_n) = -\frac{1}{2} \sum_j r_j z_j \overline{z}_j$$

dont l'adjointe est

$$j(z_0, \ldots, z_n) = -\frac{1}{2}\big(z_0 \overline{z}_0, \ldots, z_n \overline{z}_n\big).$$

(En fait, suivant les conventions, on utilise $\pm j +$ constante additive éventuelle.)

Par le Lemme I, l'action de S^1 sur $\mathbf{C}^{n+1}$ induite par l'inclusion diagonale

$$S^1 \to (S^1)^{n+1} : t \mapsto (t, t, \ldots, t)$$

est elle aussi symplectique avec moment

$$j : \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{R} : (z_0, \ldots, z_n) \mapsto -\frac{1}{2} \sum_j z_j \overline{z}_j + \text{ constante }.$$

<u>Quotient symplectique, fibrations de Hopf, un exemple de convexité</u>

Rappel des données de réduction: il s'agit d'une action symplectique de G sur (X, ω_X) avec moment équivariant $j : X \to g^\star$ et une valeur $j-$ régulière $\mu \in g^\star$.
On note $G_\mu < G$ le stabilisateur de μ pour l'action coadjointe $G \times g^\star \to g^\star : (g, \alpha) \mapsto Ad^\star_{g^{-1}} \alpha$ et on suppose que la restriction de l'action

$$G_\mu \times j^{-1}(\mu) \to j^{-1}(\mu)$$

est propre et libre. Alors $j^{-1}(\mu)/G_\mu$ est symplectique pour la 2− forme ω_μ déterminée par

$$i_\mu^\star \omega_X = p_\mu^\star \omega_\mu$$

où $i_\mu : j^{-1}(\mu) \to X$ est l'inclusion de sous-variété et

$$p_\mu : j^{-1}(\mu) \to j^{-1}(\mu)/G_\mu \qquad (\star)$$

le passage au quotient.

Voici un second lemme utile:
Lemme II Supposons qu'on ait deux actions symplectiques

$$G_\pm \times X \to X$$

qui commutent avec moments équivariants $j_\pm : X \to g^\star_\pm$. Alors si G_- préserve $j_+^{-1}(0)$, l'action

$$G_- \times j_+^{-1}(0)/G_+ \to j_+^{-1}(0)/G_+ : (g_-, [m]) \mapsto [g_- m]$$

est symplectique avec moment

$$j : j_+^{-1}(0)/G_+ \to g^\star_- : [m] \mapsto j_-(m).$$

Retour sur les actions de tores:
Soit S^{2n+1} la sphère unité de $\mathbf{C}^{n+1}$. Pour l'action de S^1 sur $\mathbf{C}^{n+1}$ plus haut et la valeur $j-$régulière $\mu = \frac{1}{2} \in \mathbf{R}$ le quotient $(\star)$ est la fibration de Hopf

$$j^{-1}(\frac{1}{2}) = S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}/S^1 \simeq P_n\mathbf{C}.$$

De plus, la forme symplectique induite sur le projectif $P_n\mathbf{C}$ coincide avec la forme ω de Fubini-Study décrite plus haut: pour voir ceci, soit

$$i : S^{2n+1} \to \mathbf{C}^{n+1}$$

l'inclusion et

$$p : S^{2n+1} \to P_n\mathbf{C} : (z_0, \ldots, z_n) \mapsto [z_0, \ldots, z_n]$$

le passage aux coordonnées homogènes. La condition

$$i^\star \omega_{standard} = p^\star \omega \ \text{ sur } S^{2n+1}$$

équivaut à

$$i^\star \omega_{standard} = (\phi_i \circ p)^\star \omega_{fs} \ \text{ sur } S^{2n+1} \cap \{(z_0, \ldots, z_n),\ z_i \neq 0\},\ 0 \le i \le n.$$

ce qui est facile à vérifier.

Les lemmes I et II appliqués à $X = S^{2n+1}, G_+ = S^1, G_- = (S^1)^n$ pour l'action diagonale de S^1 et l'action de $(S^1)^n$ induite par le plongement

$$(S^1)^n \mapsto (S^1)^{n+1} : (t_1, \ldots, t_n) \mapsto (1, t_1, \ldots, t_n)$$

assurent que l'action

$$\psi : (S^1)^n \times P_n\mathbf{C} \to P_n\mathbf{C}$$
$$\big((t_1, \ldots, t_n), [z_0, \ldots, z_n]\big) \mapsto [z_0, t_1 z_1, \ldots, t_n z_n]$$

est symplectique avec moment

$$j_\psi : P_n\mathbf{C} \to \mathbf{R}^n : [z_0, \ldots, z_n] \mapsto \frac{1}{2\sum_{j\geq 1} z_j \overline{z}_j} \big(z_1\overline{z}_1, \ldots, z_n\overline{z}_n\big).$$

Convexité de j_ψ:
classons les points de $P_n\mathbf{C}$ suivant leur stabilisateur pour ψ. On a

- les points fixes: $[1,0,\ldots,0], [0,1,\ldots,0], \ldots, [0,\ldots,0,1]$
- les points $[z_0, z_1, \ldots, z_n]$, $z_j \neq 0$ pour tout j, de stabilisateur trivial
- les points intermédiaires ayant k coordonnées z_j nulles avec $2 \leq k \leq n-1$, de stabilisateur isomorphe à $(S^1)^k$.

Notons $[p_0, p_1, \ldots p_l]_{conv}$ *l'enveloppe convexe* des points $p_0, p_1, \ldots, p_l \in \mathbf{R}^n$, i.e.

$$[p_0, p_1, \ldots, p_l]_{conv} = \{\sum_j a_j\, p_j,\ a_j \geq 0, \sum_j a_j = 1\}.$$

On observe alors que l'image de j_ψ est l'enveloppe convexe de l'image des points fixes de ψ:

$$j_\psi(P_n\mathbf{C}) = \big[j_\psi[1,0,\ldots,0], j_\psi[0,1,\ldots,0], \ldots, j_\psi[0,\ldots,0,1]\big]_{conv}.$$

Cette enveloppe est appelée le *polytope moment* . Pour $P_n\mathbf{C}$ ce polytope est, à dilatation près, le $n-$ simplexe canonique de $\mathbf{R}^n$.
Sa frontière est constituée des images des points à stabilisateur non trivial et son intérieur des images des points à stabilisateur trivial.

Un théorème de convexité d'Atiyah, Guillemin-Sternberg

Ce qui précède est un exemple simple mais important (cf les variétés symplectiques toriques infra) du théorème suivant:

Théorème [A, G-S]: Soit (X, ω_X) une variété symplectique, compacte et connexe, T un tore réel i.e. un groupe de Lie abélien compact connexe d'algèbre de Lie $\mathbf{R}^m$ et

$$\psi : T \times X \longrightarrow X$$

une action symplectique avec moment $j_\psi : X \to \mathbf{R}^m$ équivariant (i.e. constant sur les $T-$ orbites).
Alors,

- L'ensemble Z des points fixes de ψ est la réunion finie de sous-variétés symplectiques connexes Z_j, $j \in J$ et $j_\psi(Z_j) = \{c_j\} \subset \mathbf{R}^m$,
- $j_\psi(X)$ est l'enveloppe convexe de l'image des points fixes de ψ i.e.

$$j_\psi(X) = [c_j, j \in J]_{conv} \subset \mathbf{R}^m.$$

Ce n'est pas un théorème simple. La preuve utilise une généralisation de la théorie de Morse due à Bott [voir par exemple l'ouvrage: Introduction to symplectic topology de D. Mc Duff et D. Salamon. Oxford Mathematical Monographs; voir aussi le livre de M. Audin: The topology of torus actions on symplectic manifolds. Progress in Mathematics. Birkhauser.]

Un théorème de classification de Delzant

Une variété symplectique connexe compacte X de dimension $2n$ est dite *torique* si elle est munie d'une action symplectique

$$T \times X \to X : (\tau, x) \mapsto \psi_\tau(x)$$

effective ($\forall \tau \in T$, $\psi_\tau \neq Id_X$) d'un tore T de dimension n admettant un moment équivariant j_ψ.

Le thm de Delzant établit (à symplectomorphisme près) une correspondance biunivoque explicite entre certains polytopes de $\mathbf{R}^n$ (dits *de Delzant*) et les variétés symplectiques toriques de dimension $2n$. La partie constructive de la preuve (cf infra) utilise un double quotient symplectique modelé sur l'exemple de $P_n\mathbf{C}$.

Def: Un polytope $\Delta \subset \mathbf{R}^n$ est dit *de Delzant* s'il est *simple* (chaque sommet s porte n arètes), *rationnel* (les n arètes issues d'un sommet s s'écrivent $s + tu_i$, $u_i \in \mathbf{Z}^n$, $0 \leq t < \infty$) et *lisse* (on peut choisir les u_i tels que $(u_1, \ldots, u_n)$ soit une base de $\mathbf{Z}^n$).

La moitié du **Théorème** de Delzant:

Tout polytope de Delzant $\Delta \subset \mathbf{R}^n$ est le polytope moment d'une variété symplectique torique $(X_\Delta, \omega_\Delta)$.

Voici une esquisse de la preuve: soit $\Delta \subset \mathbf{R}^n$ un polytope de Delzant ayant d faces. La preuve consiste à construire la variété torique X_Δ comme un quotient symplectique de $\big(\mathbf{C}^d, \omega_{standard}\big)$ adapté au polytope Δ.
Comme tout polyèdre convexe, Δ est l'intersection finie des demi-espaces fermés portés par ses faces:

$$\Delta = \bigcap_{1 \leq i \leq d} f_i^{-1}(\mathbf{R}_+)$$

où la $i-$ème face porte l'hyperplan $f_i^{-1}(0) = \{x \in \mathbf{R}^n \ | < x, n_i >= r_i\}$. Ici n_i est la normale intérieure à la face i.

Les n arètes issues d'un sommet s étant portées par une base de $\mathbf{Z}^n$ on peut supposer que les $n-$normales n_i aux faces auxquelles s appartient constituent elles aussi une base de $\mathbf{Z}^n$.

On note $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ la base canonique de $\mathbf{R}^d$. L'application

$$\mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^n : \sum_i x_i e_i \mapsto \sum_i x_i n_i$$

est alors surjective, envoie $\mathbf{Z}^d$ sur $\mathbf{Z}^n$ et induit la suite exacte courte de groupes de Lie

$$0 \to \text{ Ker } \pi \xrightarrow{i} \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d \xrightarrow{\pi} \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n \to 0$$

ainsi que la suite dérivée

$$0 \to \text{ Ker } d\pi \xrightarrow{di} \mathbf{R}^d \xrightarrow{d\pi} \mathbf{R}^n \to 0$$

Dans ce qui suit j'utilise implicitement l'identification

$$\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d \simeq (S^1)^d : (x_1, \ldots, x_d) \mapsto (e^{ix_1}, \ldots, e^{ix_d})$$

On considère l'action symplectique

$$(S^1)^d \times \mathbf{C}^d \to \mathbf{C}^d : ((t_1, \ldots, t_d), (z_1, \ldots, z_d)) \mapsto (t_1 z_1, \ldots, t_d z_d)$$

dont on adapte le moment

$$j(z_1,\dots,z_d)=\frac{1}{2}(\mid z_1\mid^2,\dots,\mid z_d\mid^2)+(r_1,\dots,r_d)$$

au polytope Δ i.e. les constantes réelles r_i sont celles qui figurent dans l'équation des faces $f_i^{-1}(0)$. Par le lemme I, la restriction de cette action au sous-groupe Ker $\pi \subset (S^1)^d$ admet le moment

$$j_\pi : \mathbf{C}^d \to (\text{ Ker } d\pi)^\star : (z_1,\dots,z_d)\mapsto (di)^\star\big(j(z_1,\dots,z_d)\big).$$

On vérifie que $j_\pi^{-1}(0)$ est une sous-variété compacte de $\mathbf{C}^d$ sur laquelle Ker π agit librement. Ensuite on passe au quotient symplectique: on pose $X_\Delta = j^{-1}(0)/$ Ker π qui est de dimension $dim\, X_\Delta = dim\, j^{-1}(0) - dim$ Ker $\pi = (2d-(d-n))-(d-n)=2n.$

Reste à voir que X_Δ est torique: pour ce faire on construit une section s de la suite

$$0\to \text{ Ker } \pi \xrightarrow{i} \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d \xrightarrow{\pi} \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n \to 0$$

i.e. un morphisme lisse de groupes

$$s:\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n\to\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$$

tel que $\pi\circ s = Id$. Pour expliciter une telle section, quitte à changer la numérotation des faces, on peut supposer que les n premières faces ont un sommet de Δ en commun. Les n premières normales n_i constituent alors une base de $\mathbf{Z}^n$ et l'application

$$s:\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n\to\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d : (t_1,\dots,t_n)\mapsto(t_1,\dots,t_n,1,\dots,1)$$

est une section.
On a donc une action symplectique

$$\psi:\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n\times\mathbf{C}^d\to\mathbf{C}^d : \big((t_1,\dots,t_n),(z_1,\dots,z_d)\big)\mapsto s(t_1,\dots,t_n)\cdot(z_1,\dots,z_d)$$

de moment (cf Lemme I)

$$j_\psi:\mathbf{C}^d\to: (z_1,\dots,z_d)\mapsto (ds)^\star(j(z_1,\dots,z_d)).$$

Cette action satisfait (avec l'action de Ker π) les conditions du Lemme II: ψ conserve $j_\pi^{-1}(0)$, commute à l'action de Ker π et dès lors induit une action symplectique

$$\begin{aligned}&\psi_\Delta : T^n\times X_\Delta\to X_\Delta\\ &\big((t_1,\dots t_n),[z_1,\dots,z_d]\big)\mapsto[s(t_1,\dots,t_n)\cdot(z_1,\dots,z_d)]\end{aligned}$$

avec moment

$$j_\Delta\big([z_1,\dots,z_d]\big)=j_\psi(z_1,\dots z_d).$$

On vérifie pour conclure que l'on a bien $j_\Delta(X_\Delta)=\Delta$.

l'autre moitié du **Théorème** de Delzant:
Soit (X,ω) une variété symplectique torique de polytope moment Δ. Alors Δ est un polytope de Delzant et (X,ω) est isomorphe à (X_Δ,ω_Δ).

Pour la preuve du thm, voir l'article original de T. Delzant ci dessous.

Bibliographie:

Articles sur la convexité du moment:

Atiyah: Convexity and commuting hamiltonians. Bull. London Math. Soc. 14 (1982) 1-15

Guillemin, Sternberg: Convexity properties of the moment mapping. Invent. Math. 67 (1982) 491-513 & 77 (1984) 533-546

T. Delzant: Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment, Bull. Soc. Math. France 116 (1988), 315-339.

En plus des ouvrages (de D. Mc Duff, D. Salomon et de M. Audin) déjà cités dans le texte, voici deux cours très accessibles d'Ana Cannas da Silva:

Lectures on Symplectic Geometry. Lecture Notes in Mathematics 1764. Springer.

Symplectic toric Manifolds. Notes de cours en accès libre sur le web.

Voici un autre texte utile:

Victor Guillemin: Moment maps and combinatorial invariants of hamiltonian T^n- spaces. Progress in Mathematics. Birkhauser.