Équations Différentielles Ordinaires avec Singularités Régulières

Contents

1 Théorie de L. Fuchs

Dans cette section, j'expliquerai une théorie classique de L. Fuchs [F] suivant l'exposé de A. Heafliger [H]. Un exemple classique sera aussi donné.

1.1 Singularités régulières

Ici, je défini singularités régulières et fomule le théorème de L. Fuchs. Comme c'est une théorie locale, j'utilise les notions suivantes:

$$\begin{aligned}
&D_\varepsilon := \{z; |z| < \varepsilon\}, \qquad D_\varepsilon^\times := \{z; 0 < |z| < \varepsilon\},\\
&\mathcal{O} := \text{l'anneau de germs des fonctions holomorphes près de } 0,\\
&K := \mathcal{O}[\frac{1}{z}], \qquad \widetilde{\mathcal{O}}(D_\varepsilon^\times) := \text{l'anneau de fonctions holomorphes multiformes sur } D_\varepsilon^\times,\\
&\widetilde{\mathcal{O}} := \lim_{\varepsilon \to 0} \widetilde{\mathcal{O}}(D_\varepsilon^\times), \qquad \widetilde{D}_\varepsilon^\times := \{t \in \mathbb{C}; |e^{2\pi i t}| < \varepsilon\}.
\end{aligned}$$

En particulier, $\widetilde{D}_\varepsilon^\times$ est le revêtement universel de $D_\varepsilon^\times$, et on a les inclusions $\mathcal{O} \subset K \subset \widetilde{\mathcal{O}}$.

Définition 1.1. *Une fonction multiforme* $f \in \widetilde{\mathcal{O}}$ *est à* ***croissance modérée*** *près de* 0 *si, pour tout secteur* $\{z; \theta_0 \leq \arg z \leq \theta_1,\ 0 < |z| < \varepsilon\}$, *avec* ε *suffisamment petit, il existe un entier* $k > 0$ *et un constant* $C > 0$ *tels que*

$$|f(z)| < C \cdot \frac{1}{|z|^k} \qquad \forall\ z \in S.$$

Notons le sous-anneau de $\widetilde{\mathcal{O}}$ *constitué des fonctions étant à croissance modérée près de* 0 *par* $\widetilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{mod}}$

Par exemple, les fonctions z^α ($\alpha \in \mathbb{C}$) et $(\log z)^m$ ($m \in \mathbb{N}$) sont à croissance modérée. D'ici, je admets *près de* 0 pour simplicité s'il n'y aura pas de risque de confusion.

Le théorème remarquable montré par L. Fuchs [F] est

Théorème 1.1. *Soit* $P := \sum_{k=0}^n a_k(z) \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-k}$ *un opérateur différentiel avec* $a_k(z) \in K$ *et* $a_0(z) \not\equiv 0$. *Alors, les solutions multiformes* $u \in \widetilde{\mathcal{O}}$ *de l'équation différentielle*

$$Pu = 0 \tag{1}$$

sont à croissance modérée près de 0 *s.si l'ordre du pôle de* $\dfrac{a_i}{a_0}$ *à* 0 *est au plus* i *pour* $i = 1, 2, \cdots, n$.

Si ces conditions équivalentes sont satisfaites, l'EDO (1) est dite **régulière** à 0, ou on dit que 0 est une **singularité régulière**.

L'EDO (1) peut s'écrire avec l'aide de l'opérateur d'Euler $\theta := z\dfrac{d}{dz}$ (après avoir multiplié par $z^n a_0(z)^{-1}$) dans la forme

$$\theta^n u + \sum_{i=1}^n b_i(z)\theta^{n-i}u = 0.$$

Si on pose $v_i := \theta^{i-1}u$, cette équation est équivalent au système

$$\begin{aligned} \theta v_i &= v_{i+1} \qquad i = 1, \cdots, n-1, \\ \theta v_n &= -b_n(z)v_1 - \cdots b_1(z)v_n. \end{aligned}$$

Remarqueons que la condition de régularité de Fuchs, i.e., $\frac{a_i}{a_0}$ ait un pôle d'ordre au plus i à 0, est équivalent à la condition que $b_1, \cdots, b_n$ soient holomorphes. Pour le voir, utiliser la formule

$$z^n \frac{d^n}{dz^n} = \theta(\theta - 1) \cdots (\theta - n + 1).$$

1.2 Solutions multiformes et Monodromie

Ici, je commence par un système d'EDO de la forme

$$\frac{d}{dz}U(z) = A(z)U(z), \tag{2}$$

où $A(z) \in \mathrm{End}(K^n)$ et $U(z) = {}^t(u_1(z), \cdots, u_n(z))$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que les coefficients $A(z) = (a_{ij}(z))_{1 \le i,j \le n}$ soient fonctions méromorphes sur D_ε n'yant pas de pôle sauf 0.
Comme $\widetilde{D}_\varepsilon^\times$ est simplement connexe, les solutions de (2) sur $\widetilde{D}_\varepsilon^\times$ forment un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n. Soit $\widetilde{S}(t) = (\widetilde{U}^1(t), \cdots, \widetilde{U}^n(t))$ n solutions linéairement indépendantes.
Puisque les coefficients $a_{ij}(e^{2\pi it})$ ont la période 1, en remplaçant t par $t+1$, on obtient une autre base de l'espace de solutions, i.e., il existe une matrice $C \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\widetilde{S}(t+1) = \widetilde{S}(t)C.$$

La matrice C s'appelle la **matrice monodromique** du système et la transformation linéaire correspondant dans l'espace des solutions est dit la **monodromie**.
Soit Γ une matrice telle que $C = \exp(2\pi i\Gamma)$. Car la matrice $\widetilde{S}(t)\exp(-2\pi i\Gamma t)$ est de période 1, en remplçant t par $\frac{1}{2\pi i}\log z$, on obtient une matrice $\Sigma(z)$ dont les coefficients sont holomorphe sur $D_\varepsilon^\times$. Les colonnes de la matrice $S(z) := \Sigma(z)\exp(\Gamma \log z)$ forment un **système fondamental de solutions** (multiformes) de (1). Voici un résumé:

Proposition 1.2. *Tout système fondamental de solutions (multiformes) de l'équation*

$$\frac{dU}{dz} = A(z)U$$

est de la forme

$$S(z) = \Sigma(z)\exp(\Gamma \log z),$$

où $\Sigma(z)$ *est une matrice avec coefficients holomorphes en dehors de* 0, *et* Γ *est une matrice avec coefficients constants telle que* $\exp(2\pi i\Gamma) = C$ *soit la matrice monodromique.*

Si on choisit une autre base de l'espace de solutions, la matrice monodromique C, aussi bien que la matrice Γ, sera conjugée par la matrice de passage. Ainsi, on peut choisir une base telle que Γ soit dans une forme réduite de Jordan avec k bloc de la forme $\Gamma_{\alpha_i} = \alpha_i I_{n_i} + N_{n_i}$ ($I_n \in GL_n(\mathbb{C})$ est la matrice d'indentité et $N_n = \sum_{i=1}^{n-1} e_{i,i+1}$). Alors, la matrice $\exp(\Gamma \log z)$ est une matrice bloc diagonale de la forme

$$\exp(\Gamma_{\alpha_i} \log z) = z^{\alpha_i} \sum_{m=0}^{n_i - 1} \frac{1}{m!} N_{n_i}^m (\log z)^m.$$

Donc, on a

Corollaire 1.3. *Pour toute EDO* $Pu = 0$ *d'ordre* n, *il existe une solution de la forme* $z^\alpha h(z)$, *où* $h(z)$ *est holomorphe en dehors de* 0, *et* $\alpha \in \mathbb{C}$ *est tel que* $e^{2\pi i\alpha}$ *soit une valeur propre de la monodromie.*

1.3 Exemple: Fonction Hypergéométrique de Gauss

Ici, je présente la fonction hypergéométrique de Gauss. Pour le détail, voir, e.g., [AAR].
L'équation différentielle hypergéométrique (HG) est donnée comme suit:

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)z\}\frac{dw}{dz} - \alpha\beta w = 0. \tag{3}$$

Il est souvent utile de la récrire avec l'opérateur d'Euler:

$$\left[(\theta+\alpha)(\theta+\beta)-\frac{1}{z}\theta(\theta+\gamma-1)\right].w=0. \tag{4}$$

L'équation (3) admet singularités régulières à $0, 1$ et ∞. Cherchons une solution formelle de (3) autour de 0.
Posons $w = z^\rho \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ et on suppose que $c_0 = 1$. Comme

$$\begin{aligned}(\theta+\alpha)(\theta+\beta)w &= z^\rho \sum_{n\geq 0}(n+\rho+\alpha)(n+\rho+\beta)c_n z^n,\\ \frac{1}{z}\theta(\theta+\gamma-1)w &= z^\rho \sum_{n\geq 0}(n+\rho)(n+\rho+\gamma-1)c_n z^{n-1},\end{aligned}$$

comparésant le coefficient de $z^{\rho-1}$, une condition nécessaire et suffisante pour que (4) admette cette solution formelle est

$$\rho(\rho+\gamma-1)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho = 0, 1-\gamma.$$

Supposons que $\rho = 0$. En comparésant le coefficient de z^n, on a

$$c_{n+1} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}c_n.$$

(Ici, on suppose que $\gamma \notin \mathbb{Z}$ pour simplicité.) Donc, on obtient

$$w = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n =: {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};z\right),$$

où pour $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{\leq 0}$ on pose

$$(\lambda)_n := \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)} = \begin{cases}\prod_{k=1}^{n}(\lambda+k-1) & n>0,\\ 1 & n=0.\end{cases}$$

(D'ici, $\Gamma(z)$ est la Γ-fonction d'Euler.)
Pour le cas $\rho = 1-\gamma$, en utilisant la formule $\theta z^\lambda = z^\lambda(\theta+\lambda)$, on récrit (4) comme suit:

$$z^{1-\gamma}\left[(\theta+\alpha-\gamma+1)(\theta+\beta-\gamma+1)-\frac{1}{z}\theta(\theta-\gamma+1)\right].(z^{\gamma-1}w)=0.$$

Par l'argument précédent, on voit que la solution pour $\rho = 1-\gamma$ est

$$z^{1-\gamma}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1\\ 2-\gamma\end{matrix};z\right).$$

Ces 2 solutions sont linéairement indépendantes et la rayon de convergence de ces séries est 1. Donc, elles forme une base de l'espace de solutions de (3) sur $\{z\in\mathbb{C}||z|<1\}$.
Pour les autres singularités régulires de (3), on peut trouver les solutions à la même manière, et voici le résumé:

1. Solutions autour de 0: si $\gamma \notin \mathbb{Z}$,

$$f_0^1(z) := {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha, \beta \\ \gamma\end{matrix}; z\right), \qquad f_0^2(z) := z^{1-\gamma}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1 \\ 2-\gamma\end{matrix}; z\right).$$

   Le domaine de convergence est $\{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$.

2. Solutions autour de 1: si $\gamma - \alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$,

$$f_1^1(z) := {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha, \beta \\ \alpha+\beta-\gamma+1\end{matrix}; 1-z\right), \qquad f_1^2(z) := (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma-\alpha, \gamma-\beta \\ \gamma-\alpha-\beta+1\end{matrix}; 1-z\right).$$

   Le domaine de convergence est $\{z \in \mathbb{C} | |z-1| < 1\}$.

3. Solutions autour de ∞: si $\alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$,

$$f_\infty^1(z) := z^{-\alpha}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha, \alpha-\gamma+1 \\ \alpha-\beta+1\end{matrix}; \frac{1}{z}\right), \qquad f_\infty^2(z) := z^{-\beta}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\beta, \beta-\gamma+1 \\ \beta-\alpha+1\end{matrix}; \frac{1}{z}\right).$$

   Le domaine de convergence est $\{z \in \mathbb{C} | |z| > 1\}$.

Une question se pose ici: Quelles sont des relations entre ces 3 solutions ?
En fait, sur le domaine $\{z \in \mathbb{C} | |z|, |z-1| < 1\}$, 1. et 2. donnent deux bases de l'espace de solutions de (3), et sur le domaine $\{z \in \mathbb{C} | |z-1| < 1,\ |z| > 1\}$, 2. et 3. le donnent. Voici quelques-uns: sous certaines conditions, on a

1. $(f_0^1(z), f_0^2(z)) = (f_1^1(z), f_1^2(z))P_1$, où $P_1 \in GL_2(\mathbb{C})$ est définie par

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} & \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \\ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} & \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)} \end{pmatrix}.$$

2. $(f_0^1(z), f_0^2(z)) = (f_\infty^1(z), f_\infty^2(z))P_\infty$, où $P_\infty \in GL_2(\mathbb{C})$ est définie par

$$P_\infty = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}e^{-\pi i\alpha} & \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\alpha)}e^{-\pi i(\alpha-\gamma+1)} \\ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}e^{-\pi i\beta} & \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(1-\beta)}e^{-\pi i(\beta-\gamma+1)} \end{pmatrix}.$$

1.4 Systèmes avec singularités régulières

Définition 1.2. *Deux systèmes*

$$\frac{d}{dz}U = AU, \qquad \frac{d}{dz}V = BV,$$

sont dits ***équivalents*** *s'il existe une matrice $M(z) \in GL(n, K)$ telle que*

$$B = \frac{dM}{dz} \cdot M^{-1} + MAM^{-1}.$$

Cela signifie que si U est une solution du premier système, alors $V := MU$ est celle du deuxième système. Évidemment, ces deux systèmes admettent monodromies conjuguées.

Théorème 1.4. *Pour un système*

$$\frac{d}{dz}U(z) = A(z)U(z) \qquad \text{où} \quad A(z) \in \mathrm{End}(n, K), \tag{5}$$

les trois conditions suivantes sont équivalentes:

1. *(5) est équivalent à un système de la forme*

$$\frac{d}{dz}V(z) = \frac{B(z)}{z}V(z),$$

où $B(z)$ est une matrice avec les coefficients holomorphes.

2. *(5) est équivalent à un système de la forme*

$$\frac{d}{dz}V(z) = \frac{\Gamma}{z}V(z),$$

où Γ est une matrice avec les coefficients constants.

3. *Toute solution (multiforme) U de (5) est à croissance modérée (i.e., chaque composante de U est à croissance modérée.)*

Un systéme satisfaisant l'une de ces conditions est dit **régulier** (ou 0 est une **singularité régulière** de (5).)

Avant de commencer une démonstration de ce théorème, je rappelle un petit lemme:

Lemme 1.5 (L'inégalité de Grönwall)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et posons $I := [a, b]$ ou $I := [a, b[$. Soient $\alpha, \beta, u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonctions telles que $\alpha \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R})$ et β, u soient continues. Supposons que u satisfait l'inégalité*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)ds \qquad t \in I.$$

1. *Si β est positive, on a*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right) ds \qquad t \in I.$$

2. *En particulier, si α est constante, on a*

$$u(t) \leq \alpha \exp\left(\int_a^t \beta(r)dr\right).$$

Proof. Comme 2. est un cas particulier de 1., je vais montrer 1.

Posons

$$v(s) := \exp\left(-\int_a^s \beta(r)dr\right) \int_a^s \beta(r)u(r)dr \qquad s \in I.$$

Par définition, on a

$$v'(s) = \underbrace{\left(u(s) - \int_a^s \beta(r)u(r)dr\right)}_{\leq \alpha(s)} \beta(s) \exp\left(-\int_a^s \beta(r)dr\right).$$

Car $v(a) = 0$, cela implique

$$v(t) \leq \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(-\int_a^s \beta(r)dr\right) ds.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_a^t \beta(r)u(r)dr =& v(t) \exp\left(\int_a^t \beta(r)dr\right) \\ &\leq \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right) ds.\end{aligned}$$

□

Maintenant, je vais montrer Théorème 1.4:

Proof. 3. $\Rightarrow$ 2. Par Proposition 1.2, un système fondamental de solutions est de la forme $S(z) = \Sigma(z) \exp(\Gamma \log z)$.
Par hypothèse, $S(z)$ est à croissance modérée. Comme $\exp(-\Gamma \log z)$ est à croissance modérée, $\Sigma(z) := S(z) \exp(-\Gamma \log z)$ l'est aussi. Ceci dit que les coefficients de $\Sigma(z)$ sont méromorphes à 0.
Remplçant U par $V = \Sigma(z)^{-1}U$, on obtient le systéme équivalent

$$\frac{d}{dz}V = \frac{\Gamma}{z}V.$$

2. $\Rightarrow$ 1. Évident.
1. $\Rightarrow$ 3. Soit V une solution du système $\frac{d}{dz}V = \frac{B(z)}{z}V$.
Dans un secteur $S = \{z = re^{i\theta} | \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1,\ 0 < r \leq r_0\}$, on a

$$\left|\left|\frac{d}{dz}V(z)\right|\right| \leq \frac{C}{r} \left|\left|V(z)\right|\right|,$$

où $||V(z)|| := \sum_i |V_i(z)^2|$ et $C := \sup_{z\in S} ||B(z)||$. Comme $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{dV}{dz}e^{i\theta}$, on peut récrire cela comme suit:

$$\left|\left|\frac{\partial V}{\partial r}(re^{i\theta})\right|\right| \leq \frac{C}{r}||V(re^{i\theta})||.$$

Ainsi, une relation évidente $V(re^{i\theta}) - V(r_0e^{i\theta}) = -\int_r^{r_0} \frac{\partial V}{\partial r}dr$ implique

$$||V(re^{i\theta})|| \leq ||V(r_0e^{i\theta})|| + \int_r^{r_0} \frac{C}{s}||V(se^{i\theta})||ds.$$

Par l'inégalité de Grönwall (cf. Lemme 1.5), on a

$$||V(re^{i\theta})|| \leq ||V(r_0e^{i\theta})|| \left(\frac{r_0}{r}\right)^C,$$

qui signifie

$$||V(re^{i\theta})|| \leq \sup_{\theta_0\leq\theta\leq\theta_1} ||V(r_0e^{i\theta})|| \left(\frac{r_0}{r}\right)^C,$$

i.e., V est à croissance modérée. □

Rappelant que la monodromie du système régulier de Théorème 1.4.2. est $\exp(2\pi i\Gamma)$, le corollaire suivant est une conséquence immédiate:

Corollaire 1.6. *Deux systèmes réguliers sont équivalents s.si ses monodromies sont conjugées.*

1.5 Démonstration de Théorème 1.1

Je vais terminer la démonstration de Théorème 1.1.

Supposons que l'EDO $Pu = 0$ satisfait la condition de Fuchs, i.e., l'ordre du pôle de $\dfrac{a_i}{a_0}$ à 0 est au plus i. Par l'argument donné après le théorème dans § 1, cette EDO est récrit comme $Qu = 0$ où $Q = \theta^n + \sum_{i=1}^{n} b_i(z)\theta^{n-i}$. En particulier, cette dernière est équivalent à un système de la forme de Théorème 1.4.1., donc les solutions sont à croissance modérée.

Maintenant, je suppose que toute solution de $Pu = 0$ est à croissance modérée. Je vais montrer, par réccurence sur n, que $z^i a_i(z)$ $(1 \le i \le n)$ est holomorphe. En effet, il me suffit de montrer que $b_i(z)$ est holomorphe.
Par Corollaire 1.3, cette solution peut s'écrire dans la forme $u(z) = z^\alpha h(z)$. Ajoutant un entier approprié, on peut supposer que h est holomorphe à 0 et $h(0) \neq 0$. Soit $v \in \widetilde{\mathcal{O}}$ telle que $w = vu$ soit une solution de $Qw = 0$. On a

$$Qw = Qw - vQu = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{0 \le k < i} \binom{n-k}{i-k} b_k(z)(\theta^{i-k}u) \right) \theta^{n-i} v.$$

(Ici, j'ai posé $b_0(z) = 1$, pour simplicité.) La formule $\theta^{i-k}u = \theta^{i-k}(z^\alpha h) = z^\alpha(\theta+\alpha)^{i-k}h$ implique

$$\sum_{0 \le k < i} \binom{n-k}{i-k} b_k(z)(\theta^{i-k}u) = u \left(b_i(z) + \sum_{0 \le k < i} \binom{n-k}{i-k} (h^{-1}(\theta+\alpha)^{i-k}h) b_k(z) \right).$$

Donc, $Qw = Qw - vQu = uR(\theta v)$, où $R = \theta^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i(z)\theta^{n-i-1}$ et

$$c_i(z) = b_i(z) + \sum_{0 \le k < i} \binom{n-k}{i-k} (h^{-1}(\theta+\alpha)^{i-k}h) b_k(z).$$

Ceci dit que $Qw = 0$ s.si θv est une solution de $R(\theta v) = 0$ d'ordre $n-1$. Comme u et w sont à croissance modérée, v donc θv l'est aussi. Cela implique que les coefficients $c_i(z)$ sont holomorphes par hypothése et $b_i(z)$ le sont. $\square$

2 Connexions méromorphes

Dans cette section, je présentrai une version géométrique de la section dernière. Pour le détail, voir, e.g., [H] et [M] ou [HTT].

2.1 Une version locale

Ici, je vais utiliser les mêmes notions que celles de la section précédente.

Définition 2.1. *1. Un germe d'une* ***connexion méromorphe*** *près de* 0 *(on dit 'connexion méromorphe' simplement) est un* K*-espace vectoriel* M *de dimension finie avec une opération* $\nabla : M \longrightarrow M$ $\mathbb{C}$*-linéaire telle que*

$$\nabla(hu) = \frac{dh}{dz}u + h\nabla(u) \qquad \forall\ h \in K,\ \forall\ u \in M.$$

2. Soit (M, ∇) *et* (N, ∇') *connexions méromorphes. une application* $\varphi : M \longrightarrow N$ K*-linèaire s'appelle un* ***morphisme de connexions méromorphes*** *s'il satisfait* $\varphi \circ \nabla = \nabla' \circ \varphi$*. Dans ce cas, on écrit* $\varphi : (M, \nabla) \longrightarrow (N, \nabla')$*.*

Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une K-base de M et écrivons

$$\nabla e_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}(z)e_j \qquad A = (a_{i,j}(z)) \in \mathrm{End}(n, K).$$

La matrice A s'appelle la **matrice de la connexion** ∇ dans la base $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. Pour $u = \sum_{i=1}^n u_i(z)e_i(z)$, on a

$$\nabla u = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{du_i}{dz} - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(z)u_j(z) \right) e_i.$$

Donc, l'équation $\nabla u = 0$ équivaut au système de n équations différentielles homogènes d'ordre 1

$$\frac{dU}{dz} = AU.$$

Bien sûr, cela nous donne une correspondance bijective entre les classes d'équivalence des systèmes de n EDO et les classes d'isomorphes des connexions méromorphes de dimension n sur K.

Soit (M_1, ∇_1) et (M_2, ∇_2) connexions méromorphes. Alors, on peut définir la somme directe $(M_1 \oplus M_2, \nabla_1 \oplus \nabla_2)$ à la manière évidente, aussi bien que le produit tensoriel $(M_1 \otimes_K M_2, \nabla_1 \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \nabla_2)$ et $(\mathrm{Hom}_K(M_1, M_2), \nabla)$ où $\langle \nabla\varphi, u\rangle := \nabla_2\langle\varphi, u\rangle - \langle\varphi, \nabla_1 u\rangle$. En particulier, K, comme K-module, admet la connexion méromorphe définie par $\nabla f := \frac{df}{dz}$, donc le dual (M^*, ∇^*) d'une connexion méromorphe (M, ∇) l'est.

Soit M_α la connexion méromorphe de dimension 1 avec une base e telle que $z\nabla e = -\alpha e$. Si M est une connexion méromorphe associée au système $\frac{dU}{dz} = AU$, le système d'équations correspondant à la connexion méromorphe $M \otimes M_\alpha$ est le système satisfait par $V = z^\alpha U$.

Je vais montrer qu'une connexion méromorphe de dimension n est associé à une EDO d'ordre n. Je commence par

Proposition 2.1 (N. Katz)**.** *Pour toute connexion méromorphe* M*, il existe un vecteur cyclique, i.e., il existe* $v \in M$ *tel que* $v, \nabla v, \cdots, \nabla^{n-1}v$ $(\dim_K M = n)$*, soient libres.*

Proof. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de M et $\varepsilon > 0$ tel que $\nabla e_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}(z)e_j$, où $a_{i,j}(z)$ soient méromorphes sur D_ε avec un seul pôle possible à 0. Soit $a \in D_\varepsilon \setminus \{0\}$ et posons

$$\overline{e}_i := \sum_{k=0}^{n-i} \frac{(a-z)^k}{k!} \nabla^k e_i.$$

Remarquons que $\nabla^k \overline{e}_i$ est une combinaison linéaire de $e_1, \cdots, e_n$ avec les coefficients méromorphes sur D_ε et ils s'annulent à a pour $0 < k \leq n-i$. Posons

$$v := \overline{e}_1 + (z-a)\overline{e}_2 + \cdots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!}\overline{e}_n.$$

On peut montrer

$$\begin{aligned}\nabla^k v = &\sum_{i=1}^{k+1} \frac{(z-a)^{i-k-1}}{(i-k-1)!}\overline{e}_i \\ &+ \sum_{l=1}^{k} \frac{(z-a)^{n-l}}{(n-l)!} \sum_{i=1}^{l} (-1)^{n-i} \left(\sum_{j=1}^{l} \binom{k-j}{l-j} \binom{n-j}{n-i} \right) \nabla^{n-i+1+k-l} e_i,\end{aligned}$$

par réccurence. Ceci signifie que $v \wedge \nabla v \wedge \cdots \wedge \nabla^{n-1} v = h(z) e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$ où h est une fonction holomorphe sur D_ε avec $h(a) = 1$. □

Par conséquent, on a

Corollaire 2.2. *Toute connexion méromorphe M de dimension n sur K est associée à une EDO $Pu = 0$ d'ordre n.*

Proof. Soit ν un vecteur cyclique du dual M^* de M. Alors, on a

$$(\nabla^*)^n \nu = -\sum_{i=1}^{n} b_i (\nabla^*)^{n-i} \nu.$$

Ainsi, la matrice ∇^* dans la base $\{\nu, \nabla^* \nu, \cdots, (\nabla^*)^{n-1}\nu\}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & -1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_1 \end{pmatrix},$$

qui implique que la matrice de ∇ dans la base duale est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -b_n & -b_{n-1} & \cdots & -b_2 & -b_1 \end{pmatrix}.$$

Le système associé est

$$\frac{du_1}{dz} = u_2, \cdots, \frac{du_{n-1}}{dz} = u_n,$$
$$\frac{du_n}{dz} = -b_n u_1 - \cdots - b_1 u_n,$$

qui correspond à l'EDO

$$Pu = \left(\frac{d}{dz}\right)^n u + b_1 \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} u + \cdots + b_n u = 0.$$

□

Définition 2.2. *Une connexion méromorphe M est **régulière** s'il existe une K-base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de M telle que*

$$z\nabla e_i = -\sum_{j=1}^{n} b_{j,i}(z) e_j, \qquad b_{i,j} \in \mathcal{O},$$

*autrement dit, s'il existe un **$\mathcal{O}$-réseau** L, i.e., un $\mathcal{O}$ sous-module $L \subset M$ stable par θ qui engendre M sur K.*

Il est claire que M est régulière s.si M^* l'est.

Proposition 2.3. *Soit $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ une courte suite exacte. Alors, M est régulière s.si M' et M'' le sont.*

2.2 Connexions holomorphes

Soit X une variété complexe analytique, $\mathcal{O}_X$ (resp. Ω_X^p) le faisceau structural (resp. le faisceau des p-formes différentielles holomorphes.) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang fini.

Définition 2.3. *Une **connexion holomorphe** ∇ sur $\mathcal{F}$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire de faisceaux*

$$\nabla : \mathcal{F} \longrightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{F}$$

satisfaisant la règle de Leibniz: Pour tout $U \subset X$ ouvert, $s \in \mathcal{F}(U)$ et $f \in \mathcal{O}_X(U)$,

$$\nabla(f \cdot s) = f\nabla(s) + df \otimes s \in \Gamma(U, \Omega_X^1 \otimes \mathcal{F}).$$

La connexion ∇ permet de définir une dérivation le long de $\xi \in \Theta_X(U)$ sur le faisceau $\mathcal{F}|_U$: pour tout $V \subset U$ ouvert et toute section $s \in \Gamma(V, \mathcal{F})$, on définit $\nabla_\xi(s)$ comme le résultat de la contraction de $\nabla s \in \Gamma(V, \Omega_X^1 \otimes \mathcal{F})$ par le champ ξ. On a

$$\nabla_\xi(f \cdot s) = f\nabla_\xi(s) + \xi(f) \cdot s.$$

La connexion est aussi définie, pour tout $p \geq 0$, une unique application $\nabla : \Omega_X^p \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \Omega_X^{p+1} \otimes \mathcal{F}$ satisfaisant $\nabla(\omega \otimes f) = d\omega \otimes f + (-1)^p \omega \wedge \nabla(f)$. Ici, on suppose que toute connexion est **intégrable (ou plate)**, i.e., la courbure ∇^2 de la connexion ∇ est nulle. (Rappelons que cette condition est équivalent à l'équation $dA + A \wedge A = 0$ pour la matrice A de la connexion.) Par un théorème classique de Frobenius, on a

Remarque 2.1. *Pour toute connexion holomorphe plate* $(\mathcal{F}, \nabla)$ *de rang d, le faisceau* $\mathcal{F}^{\nabla} := \mathrm{Ker}\nabla$ *des* ***sections holomorphes*** ∇***-horizontales*** *de* $\mathcal{F}$ *est un* ***système local*** *de rang d, i.e., un faisceau localement constant de* $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels de rang d.*

Désignons la catégorie de connexions holomorphes plates sur X par $\mathrm{Conn}(X)$ et la catégorie des systèmes locals sur X par $\mathrm{Loc}(X)$.

Théorème 2.4. *Le foncteur associant une connexion holomorphe plate* $(\mathcal{F}, \nabla)$ *au système local* $\mathcal{F}^{\nabla}$ *est une équivalence entre* $\mathrm{Conn}(X)$ *et* $\mathrm{Loc}(X)$.

En fait, un quasi-inverse est donné comme suit: Pour $\mathcal{V}$ un système local sur X, $U \subset X$ un ouvert, $\mathcal{F} := \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}_X} \mathcal{V}$ et $\nabla(\varphi \otimes v) := d\varphi \otimes v$, pour $\varphi \in \mathcal{O}_X(U)$ et $v \in \mathcal{V}(U)$.

2.3 Connexions méromorphes régulières

Soit X une variété complexe analytique et D un diviseur (pas forcément croisements normaux). Désignons, par $\mathcal{O}_X[D]$, le faisceau des fonctions méromorphes sur X qui sont holomorphes sur $X \setminus D$ et qui admettent pôles le long de D. C'est un faisceau cohérent des anneaux.

Définition 2.4. 1. *Soit* $\mathcal{M}$ *un* $\mathcal{O}_X[D]$*-module cohérent avec une application* $\mathbb{C}$*-linéaire*

$$\nabla : \mathcal{M} \longrightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{M}$$

satisfaisant, pour tout ouvert $U \subset X$,

$$\begin{aligned} \nabla(f \cdot s) =& df \otimes s + f\nabla(s) \qquad f \in \mathcal{O}_X[D](U),\ s \in \mathcal{M}(U), \\ [\nabla_\theta, \nabla_{\theta'}] =& \nabla_{[\theta,\theta']} \qquad \theta, \theta' \in \Theta_X(U). \end{aligned}$$

(M, ∇) *s'appelle une* ***connexion méromorphe*** *le long de* D.

2. *Un morphisme* $\varphi : (\mathcal{M}, \nabla) \longrightarrow (\mathcal{M}', \nabla')$ *de connexions méromorphes le long de* D *est un morphisme* $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ *de* $\mathcal{O}_X[D]$*-modules satisfaisant* $\nabla' \circ \varphi = (\mathrm{id} \otimes \varphi) \circ \nabla$.

3. *Pour une connexion méromorphe* $(\mathcal{M}, \nabla)$ *le long de* D*, on pose*

$$\mathcal{M}^{\nabla}(U) := \{s \in \mathcal{M}(U) | \nabla(s) = 0\},$$

pour $U \subset X$ *un ouvert. Les sections de* $\mathcal{M}^{\nabla}$ *s'appelle* ***sections horizontales*** *de* $(\mathcal{M}, \nabla)$.

Désignons la catégorie des connexions méromorphes le long de D par $\mathrm{Conn}(X; D)$. On sait que c'est une catégorie abélienne. Voici un petit lemme utile:

Lemme 2.5. *Soit* $\varphi : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ *un morphisme de connexions méromorphes le long de* D*. Si* $\varphi|_{X \setminus D}$ *est un isomorphisme, alors* φ *l'est.*

Posons $B := \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ un disque ouvert. Pour $\mathcal{M} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Conn}(X; D))$ et un morphisme $i : B \to X$ tel que $i^{-1}D = \{0\}$, le germe $(i^*\mathcal{M})_0$ en $0 \in B$ soit une connexion méromorphe d'une variable que l'on a vue dans § 2.1.

Définition 2.5. *Une connexion méromorphe $\mathcal{M}$ sur X le long de D est dite* ***régulière*** *si $(i^*\mathcal{M})_0$ est régulière pour tout morphisme $i : B \to X$ tel que $i^{-1}D = \{0\} \subset B$.*

Désignons la catégorie de connexions méromorphes régulières le long de D par $\mathrm{Conn}^{\mathrm{reg}}(X; D)$. Voici quelques propriétés:

Proposition 2.6. *1. Soit*

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

une courte suite exacte de connexions méromorphes le long de D. Alors, $\mathcal{M}$ est régulière s.si $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ le sont.

2. Soit $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ connexions méromorphes régulières le long de D. Alors, $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X[D]} \mathcal{N}$ et $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X[D]}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ le sont.

La première partie est une conséquence de Proposition 2.3.

Théorème 2.7 (P. Deligne)**.** *Soit X une variété complexe analytique et D un diviseur sur X (pas forcément croisements normaux.) Alors, la restriction $\mathcal{N} \mapsto \mathcal{N}|_{X \setminus D}$ induit une équivalence*

$$\mathrm{Conn}^{\mathrm{reg}}(X; D) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Conn}(X \setminus D)$$

de catégories.

Une construction d'un quasi-inverse utilise le théorème de Hironaka (廣中): il existe un morphisme propre et surjectif $f : X' \longrightarrow X$ tel que $D' := f^{-1}D$ soit un diviseur croisements normaux et que la restriction $g : X' \setminus D' \longrightarrow X \setminus D$ de f soit un isomorphisme.

Par Théorème 2.4 et Théorème 2.7, on déduit la **correspondance de Riemann-Hilbert** par P. Deligne:

Théorème 2.8. *Soit X une variété complexe analytique et D un diviseur sur X. Il existe une équivalence de catégories*

$$\mathrm{Conn}^{\mathrm{reg}}(X; D) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Loc}(X \setminus D).$$

Références Bibliographiques

[AAR] G. Andrews, R. Askey and R. Roys, *Special Functions*, Encyclopedia of Math. and its Appl. **71**, Cambr. Univ. Press, 2001.

[D-mod] A. Borel et al., *Algebraic D-modules*, Perspectives in Math. **2**, Academic Press, 1988.

[F] L. Fuchs, *Zur Theorie des Linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen coefficienten*, Jour. f. Reine u. Angew. Math. **66**, (1866), 121–160.

[H] A. Heafliger, *Local Theory of Meromorphic Commections in Dimension One (Fuchs Theory)*, in [D-mod], (1988), 129–149.

[HTT] R. Hotta, K. Takeuchi et T. Tanisaki, *D-modules, Perverse Sheaves, and Representation Theory*, Progress in Math. **236**, Birkhäuser, 2008.

[M] B. Malgrange, *Regular Connections after Deligne*, in [D-mod], (1988), 151–172.