Dichotomies en théorie descriptive des ensembles

Stage de M2

sous la direction de Boban Veličković

Adriane Kaïchouh

Table des matières

Introduction

L'hypothèse du continu, à travers le résultat de Cantor selon lequel les espaces polonais sont soit dénombrables soit de cardinalité $2^{\aleph_0}$, a été la source de nombreux développements en théorie descriptive des ensembles. Celle-ci regorge donc de dichotomies qui, allant dans ce sens, opposent dénombrable à parfait. L'un des premiers théorèmes de ce genre est le théorème de Silver, qui montre qu'une relation d'équivalence coanalytique a soit un nombre dénombrable de classes, soit un ensemble parfait d'éléments deux à deux inéquivalents. Sa première preuve, en 1970, utilise une hypothèse qui autorise l'utilisation de l'axiome de l'ensemble des parties un nombre non dénombrable de fois à la suite. Puis, en 1980, Harrington en propose "A powerless proof" qui introduit une topologie dite effective pour faire une sorte de forcing. Cette méthode effective s'est avérée par la suite très fructueuse, et a permis de démontrer beaucoup de théorèmes de dichotomie. Cependant, les outils effectifs paraissent compliqués par rapport aux objets, classiques, des énoncés des théorèmes. La question s'est alors posée de savoir s'il existait des preuves classiques de ces dichotomies. Pour le théorème de Silver, et la plupart des autres dichotomies de type hypothèse du continu, Miller a donné en 2009 une réponse positive dans ses "Forceless, ineffective, powerless proofs of descriptive dichotomy theorems".

Il existe par ailleurs une autre approche pour les démonstrations de dichotomies en théorie descriptive qui consiste à introduire un jeu infini à deux joueurs, déterminé, tel que la victoire de chacun des joueurs implique l'une ou l'autre des conclusions de la dichotomie. Il est alors naturel de chercher à trouver une telle preuve pour les théorèmes dont Miller a trouvé une démonstration classique. Je me suis intéressée dans cette optique à un théorème fondamental : la $\mathcal{G}_0$-dichotomie. La preuve ludique que j'ai trouvée, bien qu'elle apporte un éclairage nouveau à celle de Miller, en reprend tous les éléments. Je me suis alors plongée dans la preuve effective de la $\mathcal{G}_0$-dichotomie, afin de la comparer à la preuve classique.

Bien que le stage ne se soit pas déroulé dans cet ordre, il m'a semblé préférable de présenter dans un premier temps la théorie descriptive effective des ensembles. Nous commencerons par rappeler des définitions et propriétés de base sur la récursivité, que l'on pourra trouver détaillées dans [CL03] pour définir la topologie effective sur l'espace de Baire dont nous donnerons ensuite les propriétés intéressantes. Cette première partie aboutira à la construction de la topologie de Gandy-Harrington dans laquelle on se place pour les preuves des théorèmes de dichotomie.

Dans une deuxième partie, nous exposerons la démonstration effective non pas de la $\mathcal{G}_0$-dichotomie, mais de son homologue en termes de relations d'équivalence : le théorème de Harrington-Kechris-Louveau, parce que cela permet de présenter une autre dichotomie et parce qu'il est représentatif d'une grande partie des théorèmes de dichotomie, qui portent historiquement sur des relations d'équivalence. De plus, leurs preuves effectives d'une part et classiques d'autre part se ressemblent beaucoup. Nous aurons ainsi une idée de la preuve effective de la $\mathcal{G}_0$-dichotomie.

Nous terminerons par sa preuve ludique.

1 Théorie descriptive effective

Dans cette partie, nous allons présenter les outils de la théorie descriptive effective des ensembles qui a permis de prouver la plupart des théorèmes de dichotomie connus, et ce avec des preuves très élégantes. Le mot *effective* se réfère au fait de pouvoir être calculé par un algorithme. En effet, les démonstrations de théories effectives utilisent une nouvelle topologie, dite effective, dans laquelle on ne garde que les ouverts usuels que l'on peut coder de manière effective. Cette topologie devient alors dénombrable, ce qui simplifie beaucoup les preuves. Et on ne perd pas vraiment d'information en opérant cette restriction, puisque, comme on va le voir, on peut retrouver d'une part la topologie usuelle à partir de la topologie effective, et d'autre part les théorèmes importants usuels à partir de leurs versions effectives.

Nous allons donc commencer par préciser ce que l'on entend par *effectif*, puis nous allons définir cette topologie effective et en donner les propriétés essentielles dont nous aurons besoin dans la suite, et enfin nous présenterons une topologie plus fine que la topologie effective, qui est celle utilisée dans les démonstrations.

1.1 Un peu de récursivité

Pour garder le sens intuitif du mot *effectif*, nous allons plutôt parler d'objets *récursifs*, en particuliers d'éléments de l'espace de Baire, c'est-à-dire de fonctions de ω dans ω, et par extension, d'une puissance finie de ω dans ω. On veut définir une fonction récursive comme une fonction dont on peut calculer les valeurs par un algorithme, c'est-à-dire qui peut être modélisée par une machine de Turing. Mais nous allons plutôt voir ces fonctions comme des fonctions *définissables* à partir de fonctions simples, avec des opérations simples et constructives.

Commençons par choisir lesdites fonctions et opérations simples :

Définition 1. La fonction **successeur** est la fonction qui à un entier n associe $n+1$. On la note S.

Les **projections** sont les fonctions P_p^i, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, définies par : $P_p^i(x_1, ..., x_p) = x_i$.

Soit p un entier. Soient g et h deux fonctions respectivement de ω^p et ω^{p+2} dans ω. Il existe une et une seule fonction f de ω^{p+1} dans ω telle que : $f(x_1, ..., x_p, 0) = g(x_1, ..., x_p)$ et $f(x_1, ..., x_p, y+1) = h(x_1, ..., x_p, y, f(x_1, ..., x_p, y))$. On dit que f est **définie par récurrence** à partir de g et h.

Définition 2. L'ensemble des **fonctions récursives primitives** est le plus petit sous-ensemble de l'ensemble des fonctions d'une puissance de ω dans ω, contenant toutes les fonctions constantes, les projections et la fonction successeur, et stable par composition et par définition par récurrence.

Un sous-ensemble de ω^n est appelé **récursif primitif** si sa fonction caractéristique est récursive primitive.

Toutes les opérations simples sur ω sont des fonctions récursives primitives. Mais il existe des fonctions définissables au sens intuitif qui ne le sont pas, comme la fonction d'Ackermann. On aimerait donc élargir la classe des fonctions récursives primitives, en s'autorisant des fonctions partielles, et des opérations plus compliquées.

Définition 3. On définit le **schéma** μ ainsi : soient p un entier, f une fonction partielle de ω^{p+1} dans ω. La fonction partielle $g(x_1, ..., x_p) = \mu y(f(x_1, ..., x_p, y) = 0)$ est définie par : s'il existe un entier z tel que $f(x_1, ..., x_p, z) = 0$ et pour tout $z' < z$, $f(x_1, ..., x_p, z')$ est définie, alors $g(x_1, ..., x_p)$ est le plus petit de ces entiers ; sinon, $g(x_1, ..., x_p)$ n'est pas définie.

Définition 4. L'**ensemble des fonctions partielles récursives** est le plus petit ensemble de fonctions partielles qui contienne toutes les fonctions récursives primitives et qui soit stable par composition, définition par récurrence et application du schéma μ.

Un sous-ensemble de ω^n est dit **récursif** si sa fonction caractéristique est récursive.

On peut montrer facilement, voir [CL03], que l'ensemble des fonctions récursives est stable par substitution de variables, par quantification bornée, par application d'une définition par cas. Et la famille des ensembles récursifs est stable par opérations booléennes, et par toutes les opérations précédentes.

Proposition-définition 5. *L'ensemble des fonctions récursives est dénombrable. On peut donc associer à chaque fonction un entier, appelé son* **indice**. *L'indice d'un ensemble sera alors l'indice de sa fonction caractéristique. Si e est un entier, on notera $\{e\}$ la fonction récursive associée.*

On voudrait aussi pouvoir parler de fonctions récursives dont le domaine est un sous-ensemble de $\omega^{<\omega}$, et on fixe pour cela une bijection définissable entre ω et $\omega^{<\omega}$, que l'on appelle un **codage** des suites finies. De même, on fixe des bijections récursives entre ω^n et ω. On notera ces codages $\langle\cdot\rangle$. Les réciproques de ces dernières $\langle\cdot\rangle_i$, pour $i < n$. On prendra soin, dans le cas $n = 2$ que, pour tout entier m, on ait $m \geqslant \langle m\rangle_0, \langle m\rangle_1$.

Relativisation Nous allons très souvent nous servir de fonctions récursives relativement à un élément de l'espace de Baire, c'est-à-dire qui sont définissables à partir de cet élément, qui devient un **oracle**.

Définition 6. Soit x un élément de $\mathcal{N}$. L'**ensemble des fonctions partielles récursives en l'oracle** x est le plus petit ensemble de fonctions partielles contenant x et toutes les fonctions partielles récursives, et clos par composition, définition par récurrence et application du schéma μ.

Remarque. Si l'oracle est lui-même une fonction récursive, alors l'ensemble des fonctions récursives qu'il définit est celui des fonctions récursives usuelles.

Tous les résultats de théorie effective peuvent être relativisés par rapport à un oracle donné, en reprenant exactement la même preuve. Par conséquent, nous n'expliciterons que les versions non relativisées des résultats et des démonstrations. C'est toutefois cette relativisation qui va permettre de retrouver les résultats classiques à partir de leurs versions effectives, c'est donc un procédé très puissant.

1.2 Hiérarchie effective

Armés de ces quelques définitions, nous allons pouvoir définir la topologie effective, puis la version effective de la hiérarchie borélienne. Nous en exposerons ensuite des propriétés intéressantes.

1.2.1 Définitions et propriétés de clôture

Bien que nous cherchions uniquement à définir cette topologie sur l'espace de Baire, il nous sera utile de nous autoriser des projections, donc de nous placer dans un espace générique, homéomorphe à $\mathcal{N}$, qu'on appellera $\mathcal{X}$, et qui sera un espace de la forme $\omega^k \times (\omega^\omega)^l$, pour des entiers k et l, avec $l \geqslant 1$, à permutation des termes près.

Définissons, comme dans $\mathcal{N}$, les ouverts-fermés de base : Posons $T = \omega^k \times (\omega^{<\omega})^l$, l'ensemble des indices de ces ouverts-fermés. Si $t = (n_1, ..., n_k, s_1, ..., s_l) \in T$, $N_t = \{n_1\} \times ... \times \{n_k\} \times N_{s_1} \times ... \times N_{s_l}$. Ici aussi, pour pouvoir parler de fonctions récursives, on fixe une bijection définissable entre T et ω.

Dans la topologie usuelle, pour obtenir les ouverts, on considère toutes les unions de ces ouverts-fermés. Mais la topologie effective ne garde les unions que l'on peut définir : les **unions effectives**.

Définition 7. Soit A une partie de $\mathcal{X}$. On dit que A est un **ouvert effectif** s'il existe une fonction récursive $f : \omega \to T$ telle que $A = \bigcup_{n\in\omega} N_{f(n)}$. C'est-à-dire si c'est une union d'ouverts de base que l'on peut coder par une fonction récursive.

De même, si $x \in \mathcal{N}$, on dit que A est un **ouvert effectif relativement à l'oracle** x s'il existe une fonction $f : \omega \to T$ récursive en x telle que $A = \bigcup_{n\in\omega} N_{f(n)}$.

Remarquons tout de suite qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable d'ouverts effectifs, l'ensemble des fonctions récursives étant dénombrable.

Énonçons maintenant quelques propriétés des ouverts effectifs :

Proposition 8. *Soit A une partie de $\mathcal{X}$. Alors A est un ouvert effectif si et seulement s'il existe un sous-ensemble récursif R de ω^{k+l} tel que $x \in A \Leftrightarrow \exists n \in \omega, R(\overline{x}(n))$, où l'opération $\bar{\cdot}$ est définie par : si $x = (n_1, ..., n_k, x_1, ..., x_l)$, alors $\overline{x}(n) = (\langle n_1, ..., n_1\rangle, ..., \langle n_k, ..., n_k\rangle, \langle x_1{\restriction_n}\rangle, ..., \langle x_l{\restriction_n}\rangle)$ (on associe un entier aux segments initiaux de longueur n des coordonnées de x).*

Démonstration. $\Rightarrow$] Supposons pour simplifier que $k = l = 1$, c'est-à-dire que $\mathcal{X} = \omega \times \mathcal{N}$. Supposons que A soit un ouvert effectif de $\mathcal{X}$. Il existe alors des fonctions récursives p et s telles que $A = \bigcup_{i\in\omega}(\{p(i)\} \times N_{s(i)})$. On a donc :

$$\begin{aligned}(m,y)\in A &\Leftrightarrow \exists i\in\omega,(m=p(i) \text{ et } s(i)\sqsubseteq y)\\ &\Leftrightarrow \exists i,j\in\omega,(m=p(i) \text{ et } s(i)\sqsubseteq y_{\restriction j})\\ &\Leftrightarrow \exists n\in\omega,(m=p(\langle n\rangle_0) \text{ et } s(\langle n\rangle_0)\sqsubseteq \overline{y}(\langle n\rangle_1))\\ &\Leftrightarrow \exists n\in\omega, R(\overline{m}(n),\overline{y}(n))\end{aligned}$$

où R est récursif. On utilise pour la dernière équivalence le fait que $n \geqslant \langle n\rangle_0, \langle n\rangle_1$.

$\Leftarrow$] Supposons qu'il existe un ensemble récursif (non vide) $R\subseteq\omega^{k+l}$ tel que $x\in A\Leftrightarrow \exists n\in\omega, R(\overline{x}(n))$. Soit alors $\langle a\rangle\in R$. Alors on a :

$$\begin{aligned}A &= \bigcup_{\langle n\rangle\in R} N_{\langle n\rangle}\\ &= \bigcup_{n\in\omega} N_{\langle n\cdot\chi_R(\langle n\rangle)+a\cdot\chi_{\omega^{k+l}\setminus R}(\langle n\rangle)\rangle}\end{aligned}$$

C'est donc un ouvert effectif. □

Proposition 9. *La classe des ouverts effectifs est stable par :*
(i) *intersection et union finies*
(ii) *quantification bornée sur* ω
(iii) *quantification existentielle sur* ω *et* ω^ω

Démonstration. (i)] Soient A et B deux ouverts effectifs de $\mathcal{X}$. D'après la propriété 8, il existe deux relations récursives R et S telles que $x\in A\Leftrightarrow\exists n\in\omega, R(\overline{x}(n))$ et $x\in B\Leftrightarrow\exists n\in\omega, S(\overline{x}(n))$. Alors on a :

$$x\in A\cup B\Leftrightarrow\exists n\in\omega, \overline{x}(n)\in R\cup S$$

Comme l'union de deux ensembles récursifs l'est aussi, $A\cup B$ est encore ouvert effectif, d'après la proposition précédente. De même, on a :

$$\begin{aligned}x\in A\cap B &\Leftrightarrow \exists n,m\in\omega,(R(\overline{x}(n)) \text{ et } S(\overline{x}(m)))\\ &\Leftrightarrow \exists n\in\omega,(R(\overline{x}(\langle n\rangle_0)) \text{ et } S(\overline{x}(\langle n\rangle_1)))\\ &\Leftrightarrow \exists n\in\omega, \overline{x}(n)\in R\cap S\end{aligned}$$

On utilise à la dernière ligne le fait que $n\geqslant\langle n\rangle_0,\langle n\rangle_1$. Et comme l'intersection de deux ensembles récursifs l'est aussi, $A\cap B$ est encore ouvert effectif.

(ii)] Cela découle de la proposition 8 et de la stabilité des ensembles récursifs par quantification bornée.

(iii)] Soit A une partie ouverte effective de $\omega\times\mathcal{X}$. Il existe une relation récursive R telle que $(x,n)\in A\Leftrightarrow\exists m\in\omega, R(\overline{x}(m),\overline{n}(m))$. On a alors :

$$\begin{aligned}\exists n\in\omega,(x,n)\in A &\Leftrightarrow \exists n,m\in\omega, R(\overline{x}(m),\overline{n}(m))\\ &\Leftrightarrow \exists n\in\omega, R(\overline{x}(\langle n\rangle_1),\overline{\langle n\rangle_0}(\langle n\rangle_1))\\ &\Leftrightarrow \exists n\in\omega, R'(\overline{x}(n))\end{aligned}$$

où R' est une autre fonction récursive (on utilise encore le fait que $n\geqslant\langle n\rangle_0,\langle n\rangle_1$). Cela montre bien, avec la proposition 8, que la classe Σ^0_1 est stable par projection sur ω.

Montrons enfin, par un raisonnement analogue, qu'elle est stable par projection sur $\mathcal{N}$. Pour cela, fixons un ouvert effectif A de $\mathcal{X}\times\mathcal{N}$, et une relation récursive R telle que $(x,y)\in A\Leftrightarrow\exists n\in\omega, R(\overline{x}(n),\overline{y}(n))$. On a alors :

$$\begin{aligned}\exists y\in\mathcal{N},(x,y)\in A &\Leftrightarrow \exists y\in\mathcal{N},\exists n\in\omega, R(\overline{x}(n),\overline{y}(n))\\ &\Leftrightarrow \exists m\in\omega, R'(\overline{x}(\langle m\rangle_0),\langle m\rangle_1)\\ &\Leftrightarrow \exists m\in\omega, R''(\overline{x}(m))\end{aligned}$$

où R' et R'' sont récursifs (on utilise toujours le fait que $n\geqslant\langle n\rangle_0,\langle n\rangle_1$). Cela achève la démonstration. □

Remarque. La classe des ouverts effectifs n'est pas stable par unions quelconques mais seulement par unions effectives. Les ouverts effectifs ne forment donc pas à proprement parler une topologie. Cependant, on parlera tout de même de topologie effective. On construira par la suite une vraie topologie à partir de celle-ci.

On peut de façon naturelle définir les fermés de cette topologie effective :

Définition 10. Un sous-ensemble de $\mathcal{X}$ est un **fermé effectif** si son complémentaire est un ouvert effectif. Et cette définition se relativise.

Bien sûr, de la proposition 9 découle celle-ci :

Proposition 11. *La classe des fermés effectifs est stable par :*
(i) *intersection et union finies*
(ii) *quantification bornée sur* ω
(iii) *quantification universelle sur* ω *et* ω^ω

Donnons tout de suite une autre propriété bien utile des fermés effectifs, dont l'analogue classique est bien connu :

Proposition 12. *Soit F une partie de $\mathcal{N}$. Alors F est un fermé effectif si et seulement s'il existe un arbre récursif $T \subseteq \omega^{<\omega}$ tel que F soit l'ensemble $[T]$ des branches infinies de T.*

Démonstration. Le complémentaire de F étant Σ_1^0, il existe, par la proposition 8, un ensemble récursif R tel que $x \notin F \Leftrightarrow \exists n \in \omega, R(\overline{x}(n))$. On a donc :

$$\begin{aligned} x \in F &\Leftrightarrow \forall n \in \omega, \neg R(\overline{x}(n)) \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \omega, (\forall m \leqslant n, \neg R(\overline{x}(m))) \end{aligned}$$

Définissons alors l'arbre T par :

$$s \in T \Leftrightarrow \forall m \leqslant |s|, \neg R(\langle s(0), ..., s(m-1)\rangle)$$

D'après ce qui précède, F est bien l'ensemble $[T]$ des branches infinies de T. $\square$

À partir des ouverts et des fermés, on peut définir la hiérarchie borélienne. On appelle en général $\boldsymbol{\Sigma_1^0}$ la classe des ouverts usuels et $\boldsymbol{\Pi_1^0}$ celle des fermés. Par analogie, on appelle Σ_1^0 et Π_1^0 celles des ouverts et fermés effectifs. On distinguera donc les classes dites *boldface* de celles dites *lightface*. Et si x est un oracle, on note $\Sigma_1^0(x)$ et $\Pi_1^0(x)$ les classes des ouverts et fermés effectifs relativement à x.

Poursuivons l'analogie. La hiérarchie borélienne est définie par récurrence transfinie sur les ordinaux dénombrables comme suit : pour tout α dénombrable,

$$\begin{aligned} &A \in \boldsymbol{\Sigma_\alpha^0} \Leftrightarrow \forall n \in \omega, \exists \alpha_n < \alpha \text{ et } A_n \in \boldsymbol{\Pi^0_{\alpha_n}}, A = \bigcup_{n \in \omega} A_n \\ &A \in \boldsymbol{\Pi_\alpha^0} \Leftrightarrow \mathcal{X} \setminus A \in \boldsymbol{\Sigma_\alpha^0} \\ &A \in \boldsymbol{\Delta_\alpha^0} \Leftrightarrow A \in \boldsymbol{\Sigma_\alpha^0} \cap \boldsymbol{\Pi_\alpha^0} \end{aligned}$$

La hiérarchie borélienne usuelle est donc indexée par les ordinaux dénombrables. Pour définir son équivalent effectif, on souhaiterait, à l'instar des unions effectives, que les indices soient effectifs eux aussi. Nous allons voir ce qu'est un ordinal récursif.

Définition 13. On note WO l'ensemble des bons ordres sur ω. L'**ordinal de Church-Kleene** est alors défini par : $\omega_1^{CK} = sup\{type(\leqslant) \mid \leqslant \in WO$ et $\leqslant$ récursif $\}$. Les ordinaux inférieurs à ω_1^{CK} sont appelés **ordinaux récursifs**.

De même, pour tout oracle x dans $\mathcal{N}$, on définit $\omega_1^{CK(x)} = sup\{type(\leqslant) \mid \leqslant \in WO$ et $\leqslant$ récursif en $x\}$. Les ordinaux qui lui sont inférieurs sont alors les ordinaux récursifs en x.

Remarques.
- Comme il n'y a qu'un nombre dénombrable d'ordres récursifs sur ω, cet ordinal est dénombrable.
- Tout ordinal inférieur à ω_1^{CK} est le type d'un bon ordre récursif sur ω.

Retournons maintenant à la hiérarchie effective pour laquelle nous avons tous nos indices :

Définition 14. La **hiérarchie borélienne effective** sur $\mathcal{X}$ est définie par récurrence sur les ordinaux récursifs : pour tout $\alpha < \omega_1^{CK}$,

$$
\begin{aligned}
A \in \Sigma^0_{\alpha+1} &\Leftrightarrow \forall n \in \omega, \exists B \in \Pi^0_\alpha \text{ dans } \omega \times \mathcal{X}, A = \{x \in \mathcal{X} | \exists n \in \omega, (n,x) \in B\} \\
A \in \Pi^0_\alpha &\Leftrightarrow \mathcal{X} \setminus A \in \Sigma^0_\alpha \\
A \in \Delta^0_\alpha &\Leftrightarrow A \in \Sigma^0_\alpha \cap \Pi^0_\alpha
\end{aligned}
$$

Et si λ est un ordinal limite, on pose qu'un ensemble A appartient à Σ^0_λ si et seulement si A est une union effective d'ensembles appartenant à la classe $\bigcup_{\beta<\lambda} \Pi^0_\beta$ ordonnée effectivement.

On définit de même les classes boréliennes effectives relativement à un oracle x : elles sont indexées par les ordinaux $\alpha < \omega_1^{CK(x)}$, sont notées $\Sigma^0_\alpha(x)$, Π^0_α et Δ^0_α, et sont définies par projections et unions effectives en x.

L'union de toutes ces classes forme la classe des **boréliens effectifs**, appelés aussi **ensembles hyperarithmétiques**.

Remarques.
- Ces classes sont toutes dénombrables, par construction. Il n'y a donc qu'un nombre dénombrable de boréliens effectifs.
- Les classes effectives lightface sont incluses dans les classes classiques boldface, puisqu'elles sont obtenues en ne considérant que des unions dénombrables effectives.

Remarquons que l'on peut coder un borélien par un élément de $\mathcal{N}$ en reproduisant sa construction : une suite d'unions dénombrables et de complémentaires. À partir de ce code, on peut retrouver le borélien de départ de manière effective. Cette observation mène au théorème suivant qui établit un lien fondamental entre les hiérarchies classique et effective.

Théorème 15. *(i)* $\omega_1 = sup\{\omega_1^{CK(x)} \mid x \in \mathcal{N}\}$.

(ii) Soient $\alpha < \omega_1$ et A une partie de $\mathcal{X}$. Alors $A \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha$ si et seulement s'il existe $x \in \mathcal{N}$ tel que $\alpha < \omega_1^{CK(x)}$ et $A \in \Sigma^0_\alpha(x)$.

Ce théorème donne la clé de la relativisation, en ce sens qu'il montre comment retrouver un théorème classique à partir des relativisations de sa version effective.

Montons encore d'un cran dans les hiérarchies. Du côté classique, on peut définir les ensembles analytiques et coanalytiques. Et on transposera alors les définitions du côté effectif.

Définition 16. Une partie A de $\mathcal{X}$ est dite **analytique** s'il existe un fermé F de $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ tel que A soit la projection de F sur $\mathcal{X}$: tel que $x \in A \Leftrightarrow \exists y \in \mathcal{N}, (x,y) \in F$. On note $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ la classe des ensembles analytiques.

Un ensemble est dit **coanalytique** si son complémentaire est analytique. On note $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ la classe des ensembles coanalytiques.

Comme précédemment, on appelle $\boldsymbol{\Delta}_1^1$ l'intersection des deux classes précédentes.

Les notions effectives sont définies de même : une partie **analytique effective** de $\mathcal{X}$ est la projection d'un fermé effectif de $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$. On note la classe de ces ensembles Σ_1^1.

Un ensemble **coanalytique effectif** est le complémentaire d'un analytique effectif. On note Π_1^1 la classe correspondante.

Et on définit encore $\Delta_1^1 = \Sigma_1^1 \cap \Pi_1^1$.

Pour un oracle x dans $\mathcal{N}$, on peut définir de la même manière les classes $\Sigma_1^1(x)$, $\Pi_1^1(x)$ et $\Delta_1^1(x)$.

Remarques.
- Ces classes sont encore dénombrables.
- Les analytiques effectifs sont en particulier analytiques, de même pour les coanalytiques.

Donnons maintenant quelques propriétés des ensembles analytiques et coanalytiques effectifs.

Commençons par une conséquence immédiate de la propriété 12 :

Proposition 17. *Une partie A de $\mathcal{N}$ est analytique effective si et seulement s'il existe un arbre récursif T sur $\omega \times \omega$ tel que $A = p[T] = \{x \in \mathcal{N} | \exists y \in N, (x,y) \in [T]\}$.*

Proposition 18. *(i) La classe des ensembles Σ_1^1 est stable par union et intersection finies, quantification sur ω et quantification existentielle sur $\mathcal{N}$.*

(ii) La classe Π_1^1 est stable par union et intersection finies, quantification sur ω et quantification universelle sur $\mathcal{N}$.

(iii) La classe Δ_1^1 est stable par union et intersection finies, quantification sur ω et négation.

Démonstration. Il suffit de montrer le point (i), les autres en découlant facilement à partir de la définition.

- Soient A et B deux ensembles analytiques effectifs, définis par : $x \in A \Leftrightarrow \exists y, (x,y) \in F$ et $x \in B \Leftrightarrow \exists y, (x,y) \in G$, avec F et G deux fermés effectifs. Alors on a :

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Leftrightarrow \exists y, (x,y) \in F \cup G \\ x \in A \cap B &\Leftrightarrow \exists y, (x, \langle y \rangle_0) \in F \text{ et } (x, \langle y \rangle_1) \in G \end{aligned}$$

  où $\langle y \rangle_0$ et $\langle y \rangle_1$ sont respectivement les coordonnées paires et impaires de y. Par la proposition 11, ce sont deux conditions Σ_1^1, donc $A \cup B$ et $A \cap B$ sont analytiques effectives.
- Soit A une partie analytique effective de $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$. Il existe un ensemble Π_1^0 $Q \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, tel que $A(x,y) \Leftrightarrow \exists z \in \mathcal{N}, Q(x,y,z)$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \exists y \in \mathcal{N}, A(x,y) &\Leftrightarrow \exists y, z \in \mathcal{N}, Q(x,y,z) \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathcal{N}, Q(x, \langle \alpha \rangle_0, \langle \alpha \rangle_1) \end{aligned}$$

  Donc la classe Σ_1^1 est stable par quantification existentielle sur $\mathcal{N}$.
- Soit $A \subseteq \mathcal{X} \times \omega$ un ensemble analytique effectif. Il existe un ensemble Π_1^0 Q, inclus dans $\mathcal{X} \times \omega \times \mathcal{N}$, tel que $A(x,n) \Leftrightarrow \exists y \in \mathcal{N}, Q(x,n,y)$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \omega, A(x,n) &\Leftrightarrow \forall n \in \omega, \exists y \in \mathcal{N}, Q(x,n,y) \\ &\Leftrightarrow \exists y \in \mathcal{N}, \forall n \in \omega, Q(x,n,\langle y \rangle_n) \end{aligned}$$

  où $\langle y \rangle_n(m) = y(2^n \cdot 3^n)$, ce qui est une transformation récursive. Comme la classe Π_1^1 est stable par quantification universelle sur ω, la condition précédente est bien analytique effective, ce qui montre que la classe Σ_1^1 est stable par quantification universelle sur ω aussi. De plus, on a aussi :

$$\begin{aligned} \exists n \in \omega, A(x,n) &\Leftrightarrow \exists n \in \omega, \exists y \in \mathcal{N}, Q(x,n,y) \\ &\Leftrightarrow \exists y \in \mathcal{N}, Q(x, \langle y \rangle_0(0), \langle y \rangle_1) \end{aligned}$$

  C'est une condition Σ_1^1, d'où la stabilité par quantification existentielle sur ω.

$\square$

On peut encore faire le lien entre les notions classiques et effectives, par le biais de la relativisation :

Théorème 19. *(i)* $\mathbf{\Sigma^1_1} = \bigcup_{x\in\mathcal{N}} \Sigma^1_1(x)$.
(ii) $\mathbf{\Pi^1_1} = \bigcup_{x\in\mathcal{N}} \Pi^1_1(x)$.
(iii) $\mathbf{\Delta^1_1} = \bigcup_{x\in\mathcal{N}} \Delta^1_1(x)$.

De la même manière que le théorème de Souslin nous dit que, dans le cas classique, les boréliens sont exactement les ensembles $\mathbf{\Delta^1_1}$, nous avons le théorème suivant pour les classes effectives :

Théorème(Souslin-Kleene). *Les boréliens effectifs sont exactement les ensembles* Δ^1_1.

Pour obtenir des propriétés plus intéressantes de ces classes, nous aurons besoin de parler du théorème de pré-bon ordre et de systèmes universels pour les ensembles Σ^1_1.

1.2.2 Théorème de pré-bon ordre

L'idée de cette partie est de représenter les ensembles coanalytiques effectifs, qui sont des ensembles a priori compliqués, par des ensembles d'ordinaux, à l'aide d'une fonction régulière. Plus précisément :

Définition 20. Soit A une partie de $\mathcal{X}$. Une **norme** sur A est une fonction $\varphi : A \to ON$.

A chaque norme, nous allons associer un *pré-bon ordre*. Précisons tout d'abord ce qu'on entend par *pré-bon ordre*.

Définition 21. Un **pré-bon ordre** sur A est un pré-ordre $\lesssim$ sur A tel que si $B \subseteq A$ est non vide, il existe $b \in B$ tel que pour tout $x \in B, b \lesssim x$.

Soit A une partie de $\mathcal{X}$. Si φ est une norme sur A, on lui associe le pré-bon ordre suivant : $x \lesssim y \Leftrightarrow \varphi(x) \leqslant \varphi(y)$. Inversement, à un bon ordre, on peut de la même manière associer une norme. Celle-ci est unique si on demande qu'elle envoie A dans un segment initial d'ordinaux.

Nous allons plus particulièrement nous intéresser à des normes définissables, relativement à une certaine classe.

Définition 22. Soient Γ l'une des classes précédentes et φ une norme sur une partie A de $\mathcal{X}$. On dit que φ est une **Γ-norme** si pour tout $y \in A$, l'ensemble des φ-prédecesseurs de y et son complémentaire sont dans $\Gamma(y)$ uniformément : s'il existe des parties P et Q de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ dans Γ et $\neg\Gamma$ respectivement, telles que, pour tous $x, y \in A$,

$$x \in A \text{ et } \varphi(x) \leqslant \varphi(y) \Leftrightarrow P(x,y) \Leftrightarrow Q(x,y)$$

où $\neg\Gamma$ est la classe des complémentaires d'éléments de Γ.

Nous allons en donner une caractérisation équivalente :

Définition 23. Soient A une partie de $\mathcal{X}$ et φ une norme sur A. On définit les deux relations $\leqslant^*_\varphi$ et $<^*_\varphi$ suivantes :

$$x \leqslant^*_\varphi y \Leftrightarrow x \in A \text{ et } [y \notin A \text{ ou } \varphi(x) \leqslant \varphi(y)]$$

$$x <^*_\varphi y \Leftrightarrow x \in A \text{ et } [y \notin A \text{ ou } \varphi(x) < \varphi(y)]$$

Proposition 24. *Soit Γ une des classes précédentes sur $\mathcal{X}$. Soient A une partie de $\mathcal{X}$ appartenant à Γ et φ une norme sur A. Alors φ est une Γ-norme si et seulement si les deux relations $\leqslant^*_\varphi$ et $<^*_\varphi$ sont dans Γ.*

Démonstration. $\Rightarrow$] Supposons que φ soit une Γ-norme. Soient P et Q les ensembles de la définition. On a alors :

$$x \leqslant_\varphi^* y \Leftrightarrow x \in A \text{ et } [P(x,y) \text{ ou } \neg Q(y,x)]$$
$$x <_\varphi^* y \Leftrightarrow x \in A \text{ et } \neg Q(y,x)$$

Donc ces relations sont dans Γ, par leurs propriétés de clôture (propositions 9 et 18).

$\Leftarrow$] Réciproquement, supposons que les relations $\leqslant_\varphi^*$ et $<_\varphi^*$ soient dans Γ. Posons alors : $P(x,y) \Leftrightarrow x \leqslant_\varphi^* y$ et $Q(x,y) \Leftrightarrow \neg y <_\varphi^* x$. On a bien $x \in A$ et $\varphi(x) \leqslant \varphi(y) \Leftrightarrow P(x,y) \Leftrightarrow Q(x,y)$. □

Définition 25. Soit encore Γ une classe. On dit que Γ est **normée** si tout ensemble dans Γ admet une Γ-norme.

Remarque. La classe Σ_1^0 est normée. En effet, soit A un ouvert effectif de $\mathcal{X}$. D'après la proposition 8, il existe un ensemble récursif $R \subseteq \omega^{k+l}$ tel que $A(\alpha) \Leftrightarrow \exists n \in \omega, R(\overline{\alpha}(n))$. Pour $\alpha \in A$, posons alors $\varphi(\alpha) =$ le plus petit $n \in \omega$ tel que $R(\overline{\alpha}(n))$. Ainsi définie, φ est une norme. Montrons que c'est une Σ_1^0-norme : la condition $\varphi(\alpha) = n$ est équivalente à $R(\overline{\alpha}(n))$ et $\forall m \leqslant n, \neg R(\overline{\alpha}(m))$. C'est donc une condition ouverte-fermée effective en α, uniformément, puisque Σ_1^0 et Π_1^0 sont closes par quantification bornée sur ω (d'après la proposition 9) et que R est récursive. Donc la condition $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$ est ouverte-fermée effective, ce qui implique en particulier que φ est une Σ_1^0-norme.

Nous verrons dans la suite qu'une classe normée a des propriétés remarquables. Nous les énoncerons plus particulièrement pour la classe des ensembles coanalytiques effectifs quand nous aurons en main le théorème suivant :

Théorème de pré-bon ordre. *La classe* Π_1^1 *est normée.*

Démonstration. D'après la remarque précédente, la classe Σ_1^0 est normée. À partir de cette observation, nous allons en déduire que la classe Π_1^1 est normée, en suivant la démonstration du premier théorème de périodicité de Martin et Moschovakis.

Considérons un ensemble Q coanalytique effectif dans $\mathcal{X}$. Il s'agit de construire un pré-bon ordre sur Q, et de montrer que la norme associée est une Π_1^1-norme. Pour cela, prenons un ouvert effectif P de $\mathcal{X} \times \mathcal{N}$ tel que Q soit la coprojection de P, c'est-à-dire que, pour tout $x \in \mathcal{X}$, $Q(x) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathcal{N}, P(x,\alpha)$, et fixons une Σ_1^0-norme φ sur P.

Pour tous x, y dans Q, définissons le jeu $G(x,y)$ suivant :

$$\begin{array}{c|cccccccc} \mathrm{I} & n_0 & & n_1 & & n_2 & & \ldots \\ \hline \mathrm{II} & & m_0 & & m_1 & & m_2 & \ldots \end{array}$$

Les deux joueurs choisissent à tour de rôle des entiers n_i et m_i, construisant alors des éléments α et β de $\mathcal{N}$. À la fin d'un match, le joueur II gagne si et seulement si $\varphi(x,\alpha) \leqslant \varphi(y,\beta)$. Cette condition de victoire est bien définie puisque, x et y appartenant à Q, (x,α) et (y,β) appartiennent à P quels que soient α et β.

Posons maintenant $x \lesssim y \Leftrightarrow$ II a une stratégie gagnante dans le jeu $G(x,y)$. $x \lesssim y$ implique en particulier que $sup\{\varphi(x,\alpha) | \alpha \in \mathcal{N}\} \leqslant sup\{\varphi(y,\beta) | \beta \in \mathcal{N}\}$.

Montrons que c'est un pré-bon ordre sur Q, puis que la norme associée convient.

- La réflexivité est évidente puisque si $x \in Q$, le joueur II peut systématiquement gagner le jeu $G(x,x)$ en jouant la même chose que le joueur I.
- Montrons ensuite la transitivité : supposons qu'on ait $x \lesssim y$ et $y \lesssim z$. Soient alors σ et τ deux stratégies gagnantes pour le joueur II dans les jeux $G(x,y)$ et $G(y,z)$. Construisons une stratégie gagnante pour II dans le jeu $G(x,z)$. Si, dans ce jeu, I joue n_i, on regarde la réponse m_i de σ à n_i dans $G(x,y)$. Puis on regarde, dans $G(y,z)$, la réponse k_i de τ à m_i. II répondra alors k_i dans le jeu $G(x,z)$.

$$
\begin{array}{cc|ccccccc}
 & \mathrm{I} & n_0 & & n_1 & & \cdots & \alpha \\
\hline
G(x,y) & \mathrm{II} & & m_0 & & m_1 & \cdots & \beta
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\} \varphi(x,\alpha) \leqslant \varphi(y,\beta)
$$

$$
\begin{array}{cc|ccccccc}
 & \mathrm{I} & m_0 & & m_1 & & \cdots & \beta \\
\hline
G(y,z) & \mathrm{II} & & k_0 & & k_1 & \cdots & \gamma
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\} \varphi(y,\beta) \leqslant \varphi(z,\gamma)
$$

donc

$$
\begin{array}{cc|ccccccc}
 & \mathrm{I} & n_0 & & n_1 & & \cdots & \alpha \\
\hline
\mathbf{G(x,z)} & \mathrm{II} & & k_0 & & k_1 & \cdots & \gamma
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\} \varphi(x,\alpha) \leqslant \varphi(z,\gamma)
$$

Dans la figure, les flèches pleines désignent la reprise d'un entier, et les flèches pointillées désignent l'application de la stratégie gagnante.

Soient α, β et γ les suites construites par les n_i, m_i et k_i. Comme σ et τ sont gagnantes pour II, on a en fin de matchs les inégalités suivantes : $\varphi(x,\alpha) \leqslant \varphi(y,\beta)$ par le jeu $G(x,y)$ et $\varphi(y,\beta) \leqslant \varphi(z,\gamma)$ par le jeu $G(y,z)$. Au final, on obtient $\varphi(x,\alpha) \leqslant \varphi(z,\gamma)$, c'est-à-dire $x \lesssim z$.

– Montrons maintenant que $\lesssim$ est total. Soient x et y dans Q. Comme φ est une Σ^0_1-norme sur P, la condition de victoire du jeu $G(x,y)$ est ouverte. Par Gale-Stewart, le jeu $G(x,y)$ est donc déterminé. Donc, si on n'a pas $x \lesssim y$, c'est que le joueur I a une stratégie gagnante σ dans le jeu $G(x,y)$. Construisons alors une stratégie gagnante pour II dans $G(y,x)$. Soit n_0 le premier coup de I imposé par σ dans $G(x,y)$. Et supposons qu'au premier coup, dans $G(y,x)$, le joueur I commence par jouer m_0. Le joueur II va alors répondre par n_0. Puis on considère la réponse n_1 de σ à m_0 dans $G(x,y)$. Ce sera la réponse de II au deuxième coup de I dans $G(y,x)$. On continue ainsi, en inversant les coups des joueurs :

$$
\begin{array}{cc|cccccccc}
 & \mathrm{I} & & n_0 & & n_1 & & n_2 & \cdots & \alpha \\
\hline
G(x,y) & \mathrm{II} & & & m_0 & & m_1 & & \cdots & \beta
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\} \varphi(x,\alpha) > \varphi(y,\beta)
$$

donc

$$
\begin{array}{cc|cccccccc}
 & \mathrm{I} & m_0 & & m_1 & & m_2 & & \cdots & \beta \\
\hline
\mathbf{G(y,x)} & \mathrm{II} & & n_0 & & n_1 & & n_2 & \cdots & \alpha
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right\} \varphi(y,\beta) \leqslant \varphi(x,\alpha)
$$

A la fin du match, les n_i et m_i forment des éléments α et β de $\mathcal{N}$. Comme σ est gagnante pour I dans $G(x,y)$, on a $\varphi(x,\alpha) > \varphi(y,\beta)$, et donc $\varphi(y,\beta) \leqslant \varphi(x,\alpha)$, ce qui montre que la stratégie de II est gagnante dans $G(y,x)$.

– Montrons finalement que c'est un pré-bon ordre, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de chaîne descendante infinie $x_0 \succ x_1 \succ \ldots$ dans Q, où la relation $\succ$ est définie par $x \succ y \Leftrightarrow x \gtrsim y$ et $x \not\lesssim y$. Comme, pour x et y dans Q, le jeu $G(x,y)$ est déterminé, la condition $x \succ y$ est équivalente au fait que I ait une stratégie gagnante dans $G(x,y)$. Supposons donc qu'il existe une chaîne infinie descendante. Le diagramme suivant donne une contradiction puisque φ prend ses valeurs dans les ordinaux.

$$
\begin{array}{cc|ccccccccl}
 & \mathrm{I} & \alpha_0(0) & & \alpha_0(1) & & \alpha_0(2) & \cdots & & \alpha_0 & \multirow{2}{*}{$\Bigg\}\quad \varphi(x_0,\alpha_0) > \varphi(x_1,\alpha_1)$} \\
\hline
G(x_0,x_1) & \mathrm{II} & & \alpha_1(0) & & \alpha_1(1) & & & \cdots & \alpha_1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc|ccccccccl}
 & \mathrm{I} & \alpha_1(0) & & \alpha_1(1) & & \alpha_1(2) & \cdots & & \alpha_1 & \multirow{2}{*}{$\Bigg\}\quad \varphi(x_1,\alpha_1) > \varphi(x_2,\alpha_2)$} \\
\hline
G(x_1,x_2) & \mathrm{II} & & \alpha_2(0) & & \alpha_2(1) & & & \cdots & \alpha_2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc|ccccccccl}
 & \mathrm{I} & \alpha_2(0) & & \alpha_2(1) & & \alpha_2(2) & \cdots & & \alpha_2 & \multirow{2}{*}{$\Bigg\}\quad \varphi(x_2,\alpha_2) > \varphi(x_3,\alpha_3)$} \\
\hline
G(x_2,x_3) & \mathrm{II} & & \alpha_3(0) & & \alpha_3(1) & & & \cdots & \alpha_3 &
\end{array}
$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

Nous avons donc bien construit un pré-bon ordre sur Q. Soit ψ la norme associée. Il reste à montrer que c'est une Π^1_1-norme. Pour cela, élargissons la définition du jeu $G(x, y)$ aux points qui ne sont pas dans Q : pour x et y dans $\mathcal{X}$, le jeu $G'(x, y)$ se joue comme $G(x, y)$, et à la fin d'un match, le joueur II gagne si et seulement si $\neg P(y, \beta)$ ou $[P(x, \alpha)$ et $P(y, \beta)$ et $\varphi(x, \alpha) \leqslant \varphi(y, \beta)]$. Quand x et y sont dans Q, c'est donc exactement le jeu $G(x, y)$. De plus, il est encore déterminé. Et on a :

$$
\begin{aligned}
x \leqslant^*_\psi y &\Leftrightarrow x \in Q \text{ et } [y \notin Q \text{ ou } \psi(x) \leqslant \psi(y)] \\
&\Leftrightarrow x \in Q \text{ et II a une stratégie gagnante dans } G'(x, y) \\
&\Leftrightarrow x \in Q \text{ et I n'a pas de stratégie gagnante dans } G(x, y) \\
&\Leftrightarrow x \in Q \text{ et } \forall\sigma, \exists\beta, [(x, \sigma * [\beta]) \leqslant^*_\varphi (y, \beta)]
\end{aligned}
$$

où $\sigma * [\beta]$ désigne l'élément joué par I lorsqu'il utilise la stratégie σ contre β.

C'est bien une condition Π^1_1, puisque la relation $\leqslant^*_\varphi$ est Σ^0_1 d'après la proposition 24, et que la classe Σ^0_1 est stable par quantification existentielle sur $\mathcal{N}$, d'après la proposition 9.

De même, la relation $<^*_\psi$ est Π^1_1 puisque :

$$
\begin{aligned}
x <^*_\psi y &\Leftrightarrow x \in Q \text{ et } [y \notin Q \text{ ou } \psi(x) < \psi(y)] \\
&\Leftrightarrow x \in Q \text{ et I a une stratégie gagnante dans le jeu } G'(y, x) \\
&\Leftrightarrow x \in Q \text{ et II n'a pas de stratégie gagnante dans } G'(y, x) \\
&\Leftrightarrow x \in Q \text{ et } \forall\tau, \exists\alpha, [(y, \alpha) <^*_\varphi (x, [\alpha] * \tau)]
\end{aligned}
$$

D'où finalement, par la propriété 24, ψ est une Π^1_1-norme, et la classe Π^1_1 est normée.

□

Énonçons tout de suite une application importante :

Théorème 26. *La classe Π^1_1 a la* ***propriété de réduction****, c'est-à-dire que si A et B sont deux coanalytiques effectifs, il existe deux coanalytiques effectifs disjoints A^* et B^* tels que $A^* \subseteq A$, $B^* \subseteq B$ et $A^* \cup B^* = A \cup B$.*

Démonstration. Soient A et B deux ensembles Π^1_1. Considérons alors l'ensemble $C = (A\times\{0\})\cup(B\times\{1\})$. C'est une partie coanalytique effective de $\mathcal{X}\times\omega$. Par le théorème de pré-bon ordre, il existe une Π^1_1-norme sur C. Définissons ainsi les ensembles recherchés :

$$x \in A^* \Leftrightarrow (x,0) \leqslant^*_\varphi (x,1)$$

$$x \in B^* \Leftrightarrow (x,1) <^*_\varphi (x,0)$$

Ce sont bien des ensembles Π^1_1, disjoints, qui conviennent. ☐

Corollaire 27. *La classe Σ^1_1 a la **propriété de séparation**, c'est-à-dire que si A et B sont deux analytiques effectifs disjoints, il existe un borélien effectif qui les sépare : tel que $A \subseteq C$ et $B \cap C = \emptyset$.*

Démonstration. Soient A et B deux analytiques effectifs de $\mathcal{X}$. Considérons les ensembles $A' = \mathcal{X}\setminus A$ et $B' = \mathcal{X}\setminus B$. Ils sont coanalytiques effectifs. La proposition précédente donne deux ensembles coanalytiques effectifs A^* et B^* disjoints tels que $A^* \subseteq A'$, $B^* \subseteq B'$ et $A^*\cup B^* = A'\cup B' = (\mathcal{X}\setminus A)\cup(\mathcal{X}\setminus B) = \mathcal{X}$. A^* et B^* sont donc complémentaires. Posons $C = B^*$. Comme $\mathcal{X}\setminus C \subseteq \mathcal{X}\setminus A$, on a $A \subseteq C$, et C est disjoint de B puisque $C \subseteq \mathcal{X}\setminus B$. Et C est bien Δ^1_1 donc borélien effectif par le théorème de Souslin-Kleene. ☐

Généralisons maintenant le théorème de réduction à une infinité d'ensembles coanalytiques effectifs :

Théorème d'uniformisation de Kreisel. *Soit $P \subseteq \mathcal{X}\times\omega$ un ensemble Π^1_1. Il existe alors un ensemble Π^1_1 P^*, inclus dans P, tel que :*

$$\exists n, P(x,n) \Leftrightarrow \exists! n, P^*(x,n)$$

Démonstration. D'après le théorème de pré-bon ordre, il existe une Π^1_1-norme φ sur P. Posons alors :

$$P^*(x,n) \Leftrightarrow P(x,n) \text{ et } \forall m, (x,n) \leqslant^*_\varphi (x,m) \text{ et } \forall m < n, (x,n) <^*_\varphi (x,m)$$

Autrement dit, on prend les éléments de P qui correspondent à un entier minimal pour la norme, et minimal parmi les entiers qui réalisent le minimum pour la norme. C'est bien un ensemble Π^1_1, par la propriété 24, et il réduit P. ☐

Dans le théorème de réduction, nous aimerions trouver plus directement, et de manière absolue, les ensembles recherchés à partir des ensembles de départ. Cela nous amène à coder les ensembles analytiques et coanalytiques (de départ) puis à retrouver effectivement le code des ensembles d'arrivée, et ce universellement. Mais commençons d'abord par quelques préliminaires techniques sur les bons ordres.

1.2.3 Bref retour sur les bons ordres

Commençons par définir un ordre sur les noeuds d'un arbre, définissable, et qui aura la propriété sympatique d'être un bon ordre si et seulement si l'arbre est bien fondé. On s'en servira avec la propriété 17 pour caractériser les analytiques effectifs.

Définition 28. Soit T un arbre sur un ensemble X totalement ordonné. On définit sur T l'**ordre de Kleene-Brouwer** $\leqslant^T_{KB}$ par, pour tous $s,t \in T$, $s \leqslant^T_{KB}$ si et seulement si $t \sqsubseteq s$ ou si s et t sont incompatibles et vérifient $s(n) < t(n)$, où $n = min\{k \mid s(k) \neq t(k)\}$.

Proposition 29. *Soit T un arbre sur un ensemble X totalement ordonné. Alors $\leqslant^T_{KB}$ est un bon ordre si et seulement si T est bien fondé.*

Donnons maintenant quelques propriétés topologiques de l'ensemble des bons ordres, qui nous seront utiles dans la suite.

Proposition 30. (i) *L'ensemble* WO *des bons ordres sur* ω *est coanalytique effectif.*

(ii) *Pour tout sous-ensemble coanalytique* A *de* $\mathcal{N}$*, il existe une fonction continue de* $\mathcal{N}$ *dans l'ensemble* LO *des ordres totaux, telle que* $A = f^{-1}(WO)$.

(iii) WO *n'est pas analytique, ni a fortiori analytique effectif.*

Démonstration. $i]$ La définition naturelle d'un bon ordre est une condition Π^1_1.

$ii]$ Soit A une partie coanalytique de $\mathcal{N}$. Il existe un fermé F de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ tel que le complémentaire de A, analytique, soit la projection de F. Il existe un arbre T sur $\omega \times \omega$ tel que $F = [T]$. Pour tout élément x de $\mathcal{N}$, définissons l'arbre T_x par $s \in T_x \Leftrightarrow (x_{\upharpoonright |s|}, s) \in T$. On a alors :

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow \forall y \in \mathcal{N}, (x,y) \notin [T] \\ &\Leftrightarrow [T_x] = \emptyset \\ &\Leftrightarrow T_x \text{ est bien fondé} \\ &\Leftrightarrow \leqslant^{T_x}_{KB} \text{ est un bon ordre} \end{aligned}$$

On obtient donc une fonction $f : \mathcal{N} \to LO$ telle que $f(x) = \leqslant^{T_x}_{KB}$ et $A = f^{-1}(WO)$ par l'équivalence précédente. La fonction f est bien continue. De plus, si A est un ensemble coanalytique effectif, l'arbre T peut être choisi récursif, et la fonction f est alors récursive aussi.

$iii]$ Si WO était aussi analytique, par le théorème de Souslin, il serait borélien. Il existerait donc un ordinal dénombrable α tel que WO appartienne à Σ^0_α. Mais alors le point ii implique que tout ensemble borélien serait Σ^0_α, ce qui est exclu. □

Prenons maintenant en compte la récursivité en considérant des ensembles de bons ordres avec des propriétés plus précises :

Définition 31. On appelle $\mathbf{WO^0}$ l'ensemble des bons ordres récursifs sur ω, et, pour tout ordinal dénombrable γ, $\mathbf{WO}_\gamma$ l'ensemble des bons ordres sur ω de types inférieurs ou égaux à γ. Enfin, on définit $\mathbf{WO^0_\gamma} = WO^0 \cap WO_\gamma$.

On peut relativiser ces définitions à un oracle.

Remarques. – Pour tout ordinal dénombrable γ, l'ensemble WO^0_γ est Δ^1_1.
– WO^0 n'est pas non plus Σ^1_1, par la même preuve que précédemment.

Cela nous permet d'énoncer un théorème très intéressant, qui montre que les ordinaux récursifs couvrent une grande classe de bons ordres.

Théorème(Spector). $\omega_1^{CK} = sup\{type(\leqslant) \mid \ \leqslant \in WO \ \textit{et} \ \leqslant \in \Delta^1_1\}$.

Démonstration. Il suffit de montrer que si $\leqslant$ est un bon ordre Δ^1_1, alors son type est inférieur à ω_1^{CK}. Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe donc un bon ordre $\leqslant$ tel que $type(\leqslant) \geqslant \omega_1^{CK}$. Alors, pour tout ordre total z, $z \in WO^0$ si et seulement si z est récursif et s'il existe une fonction de (ω, z) dans $(\omega, \leqslant)$ qui préserve l'ordre. C'est une condition Σ^1_1. Mais cela contredit la propriété 30. □

1.2.4 Ensembles universels et codages

Dans cette partie, nous allons définir la notion d'ensemble *universel* pour une classe d'ensembles donnés, et en montrer l'existence pour les classes effectives. Cela nous permettra de présenter plusieurs types de codages de ces ensembles.

Définition 32. Soit Γ une classe dénombrable. Un ensemble $P \subseteq \omega \times \mathcal{X}$ est dit **universel** pour les éléments de Γ si P est dans Γ et si pour tout sous-ensemble A de $\mathcal{X}$ qui appartient à Γ, il existe un entier n tel que $A = P_n = \{x \in \mathcal{X} \mid (n,x) \in P\}$.

Un ensemble universel fournit donc une énumération, un codage, des éléments de la classe Γ et donc de leurs complémentaires.

Notons que les classes effectives admettent des ensembles universels :

Théorème 33. *Il existe un ensemble universel P pour les coanalytiques effectifs de $\mathcal{X}$. Son complémentaire est donc un ensemble universel pour les analytiques effectifs.*

Démonstration. D'après la proposition 30, pour toute partie coanalytique effective A de $\mathcal{X}$, il existe une fonction récursive continue de $\mathcal{X}$ dans LO telle que $A = f^{-1}(WO)$. Nous pouvons identifier les fonctions récursives et leurs indices, ce qui nous mène à définir P par :

$$(n, x) \in P \Leftrightarrow \{n\}(x) \in WO$$

L'ensemble P est alors Π^1_1, et pour tout sous-ensemble Π^1_1 A de $\mathcal{X}$, il existe un entier n tel que $A = P_n$ d'après ce qui précède. Donc P est bien un ensemble Π^1_1 universel. $\square$

Remarque. La classe Δ^1_1, par contre, n'admet pas d'ensemble universel.

Nous allons donc chercher à coder les boréliens effectifs à l'aide des codages des ensembles analytiques et coanalytiques. Présentons un codage des ensembles Δ^1_1 :

Théorème 34. *Il existe des ensembles Π^1_1 $P^+, P^- \subseteq \omega \times \mathcal{X}$ et $D \subseteq \omega$ tels que :*
(i) pour tout $n \in D$, P^+_n et P^-_n soient complémentaires dans $\mathcal{X}$.
(ii) pour tout sous-ensemble Δ^1_1 A de $\mathcal{X}$, il existe $n \in D$ tel que $A = P^+_n$.

Démonstration. Soit $P \subseteq \omega \times \mathcal{X}$ un ensemble Π^1_1 universel. Définissons des sous-ensembles Q^+ et Q^- de $\omega \times \mathcal{X}$, à partir de P, qui puissent prendre en compte les indices des ensembles coanalytiques et de leurs complémentaires, par :

$$Q^+(\langle m, k\rangle, x) \Leftrightarrow P(m, x)$$
$$Q^-(\langle m, k\rangle, x) \Leftrightarrow P(k, x)$$

Ce sont des ensembles Π^1_1. On leur applique alors la propriété de réduction : il existe des sous-ensembles disjoints Π^1_1 P^+ et P^- de $\omega \times \mathcal{X}$ tels que $P^+ \subseteq Q^+$, $P^- \subseteq Q^-$ et $P^+ \cup P^- = Q^+ \cup Q^-$.

Définissons maintenant l'ensemble D par :

$$\begin{aligned} n \in D &\Leftrightarrow P^+_n \cup P^-_n = \mathcal{X} \\ &\Leftrightarrow Q^+_n \cup Q^-_n = \mathcal{X} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{X}, (Q^+(n, x) \text{ ou } Q^-(n, x)) \end{aligned}$$

L'ensemble D est alors Π^1_1 dans ω.

Vérifions que les ensembles ainsi définis conviennent. Tout d'abord, si $n \in D$, l'union de P^+_n et P^-_n est égale à $\mathcal{X}$ tout entier, et ils sont disjoints, par construction. Donc ils sont bien complémentaires. Ensuite, supposons que A soit un ensemble Δ^1_1. Alors A est en particulier Π^1_1. Or P est universel pour les ensembles Π^1_1, donc il existe un entier n tel que $A = P_n$. De plus, le complémentaire de A est Π^1_1 aussi, donc il existe un entier m tel que $A = \mathcal{X} \setminus P_m$. On a alors :

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow P(n, x) \\ &\Leftrightarrow \neg P(m, x) \\ &\Leftrightarrow Q^+(\langle n, m\rangle, x) \\ &\Leftrightarrow \neg Q^-(\langle n, m\rangle, x) \end{aligned}$$

Donc $A = Q^+_{\langle n,m\rangle}$, qui est déjà le complémentaire de $Q^-_{\langle n,m\rangle}$.Donc $P^+_{\langle n,m\rangle} = Q^+_{\langle n,m\rangle} = A$. $\square$

Nous allons maintenant donner un deuxième codage, très proche de celui-ci, pour les réels Δ^1_1 relativement à un oracle. Rappelons tout d'abord ce que l'on entend par cela :

Définition 35. Soit α un élément de $\mathcal{N}$. Un réel $\beta \in \mathcal{N}$ est dit Δ^1_1 relativement à α si son graphe, en tant que fonction de ω dans lui-même, est un ensemble $\Delta^1_1(\alpha)$. On notera alors $\beta \in \Delta^1_1(\alpha)$.

Théorème 36. *Il existe une relation Π^1_1 $C \in \omega \times \mathcal{N}$, et une fonction $\delta : C \to \mathcal{N}$ vérifiant :*

$$\beta \in \Delta^1_1(\alpha) \Leftrightarrow \exists n \in \omega, [(n,\alpha) \in C \text{ et } \beta = \delta(n,\alpha)]$$

et que la relation $\beta = \delta(n,\alpha)$ soit Δ^1_1 uniformément : qu'il existe des sous-ensembles respectivement Π^1_1 et Σ^1_1 Q et R de $\omega \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ tels que pour tout $(n,\alpha) \in C$, on ait :

$$\beta = \delta(n,\alpha) \Leftrightarrow Q(n,\alpha,\beta) \Leftrightarrow R(n,\alpha,\beta)$$

Démonstration. Soit $P \subseteq \omega \times (\omega \times \omega \times \mathcal{N})$ un ensemble universel pour les ensembles Π^1_1 de $\omega \times \omega \times \mathcal{N}$. Par le théorème de Kreisel, il existe un ensemble Π^1_1 $P^* \subseteq P$ tel que $\exists k \in \omega, P(n,m,k,\alpha) \Leftrightarrow \exists! k \in \omega, P^*(n,m,k,\alpha)$. Définissons alors C par :

$$(n,\alpha) \in C \Leftrightarrow \forall m \in \omega, \exists k \in \omega, P^*(n,m,k,\alpha)$$

et la fonction δ en posant, pour tout (n,α) dans C et pour tout entier m, $\delta(n,\alpha)(m) =$ l'unique entier k tel que $P^*(n,m,k,\alpha)$.

Montrons que ces ensembles conviennent : supposons que $\beta \in \Delta^1_1(\alpha)$. Alors il existe un ensemble Π^1_1 S tel que $\beta(m) = k \Leftrightarrow S(m,k,\alpha)$. L'ensemble P étant Π^1_1 universel, il existe un entier n tel que $\beta(m) = k \Leftrightarrow P(n,m,k,\alpha)$, et donc un unique entier n' tel que $\beta(m) = k \Leftrightarrow P^*(n',m,k,\alpha)$. Ainsi, $\beta = \delta(n',\alpha)$.

Montrons finalement que cette dernière condition est uniformément Δ^1_1. Posons pour cela :

$$Q(n,\alpha,\beta) \Leftrightarrow \forall m,k \in \omega, [\beta(m) = k \Rightarrow P^*(n,m,k,\alpha)]$$
$$R(n,\alpha,\beta) \Leftrightarrow \forall m,k \in \omega, [P^*(n,m,k,\alpha) \Rightarrow \beta(m) = k]$$

Par ce qui précède, ces ensembles, qui sont respectivement Π^1_1 et Σ^1_1, conviennent. ☐

Corollaire(Kleene). *Soit P un sous-ensemble Π^1_1 de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Alors l'ensemble Q, défini par $\alpha \in Q \Leftrightarrow \exists \beta \in \Delta^1_1(\alpha), P(\alpha,\beta)$, est aussi Π^1_1 dans $\mathcal{N}$.*

Démonstration. Reprenons les notations du théorème précédent. On a alors l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \alpha \in Q &\Leftrightarrow \exists \beta \in \Delta^1_1(\alpha), P(\alpha,\beta) \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \omega, [(n,\alpha) \in C \text{ et } P(\alpha,\delta(n,\alpha)] \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \omega, [(n,\alpha) \in C \text{ et } \forall \beta \in \mathcal{N}, (\beta = \delta(n,\alpha) \Rightarrow P(\alpha,\beta)] \end{aligned}$$

C'est donc une condition Π^1_1, par le théorème précédent. ☐

Nous avons obtenu un codage des ensembles coanalytiques effectifs, mais si nous avons le code de deux ensembles Π^1_1, on ne sait pas a priori retrouver de manière effective le code de leurs réduits. Nous allons pour cela définir des systèmes *uniformes* d'ensembles universels.

Définition 37. Un **système universel** Π^1_1 est une famille $\{P^{\mathcal{X}}\}$ d'ensembles universels pour les parties Π^1_1 des ensembles de la forme de $\mathcal{X}$. On appelle un tel système **uniforme** si pour tout $m \in \omega$, et pour tout espace de la forme de $\mathcal{X}$, il existe une fonction récursive $S^{\mathcal{X}}_m : \omega^{m+1} \to \omega$ telle que :

$$(e, k_1, ..., k_m, x) \in P^{\omega^m \times \mathcal{X}} \Leftrightarrow (S^{\mathcal{X}}_m(e, k_1, ..., k_m), x) \in P^{\mathcal{X}}$$

Théorème 38. *Il existe un système universel Π^1_1 uniforme.*

Démonstration. Soit $\{P^{\mathcal{X}}\}$ un système universel Π^1_1 (il en existe d'après le théorème 33). Définissons un nouveau système $\{P'^{\mathcal{X}}\}$ par :

$$(e,x) \in P'^{\mathcal{X}} \Leftrightarrow (\langle e\rangle_0, \langle e\rangle_1, x) \in P^{\omega\times\mathcal{X}}$$

C'est encore un système universel Π^1_1. En effet, soit A une partie coanalytique effective de $\mathcal{X}$. Alors il existe n tel que $A = P^{\mathcal{X}}_n$. Mais comme $P^{\mathcal{X}}$ est lui-même coanalytique effectif, il existe un entier m tel que $P^{\mathcal{X}} = P^{\omega\times\mathcal{X}}_m$. Donc $A = P^{\omega\times\mathcal{X}}_{m,n} = P'^{\mathcal{X}}_{\langle m,n\rangle}$.

Montrons maintenant que c'est un système universel uniforme. Fixons pour cela m et $\mathcal{X}$ puis introduisons l'ensemble $Q^{\mathcal{X}}_m \in \omega\times\mathcal{X}$ suivant :

$$(e,x) \in Q^{\mathcal{X}}_m \Leftrightarrow (\langle e\rangle_0, ..., \langle e\rangle_m, x) \in P'^{\omega^m\times\mathcal{X}}$$

C'est un ensemble Π^1_1. Il existe donc un entier i tel que $Q^{\mathcal{X}}_m = P^{\omega\times\mathcal{X}}_i$, c'est-à-dire tel que :

$$(e,x) \in Q^{\mathcal{X}}_m \Leftrightarrow (i,e,x) \in P^{\omega\times\mathcal{X}} \Leftrightarrow (\langle i,e\rangle, x) \in P'^{\mathcal{X}}$$

Posons alors $S^{\mathcal{X}}_m(e,k_1,...,k_m) = \langle i, \langle e,k_1,...,k_m\rangle\rangle$. C'est bien une fonction récursive qui convient d'après la définition de $Q^{\mathcal{X}}_m$.

□

Rendons alors uniforme la propriété de réduction : fixons un système universel Π^1_1 uniforme $\{P^{\mathcal{X}}\}$ et un ensemble $\mathcal{X}$. Posons, comme dans la preuve du théorème 34 :

$$(m,n,x) \in Q_0 \Leftrightarrow (m,x) \in P^{\mathcal{X}}$$
$$(m,n,x) \in Q_1 \Leftrightarrow (n,x) \in P^{\mathcal{X}}$$

Les ensembles Q_0 et Q_1 étant coanalytiques effectifs, il existe des ensembles Π^1_1 Q^*_0 et Q^*_1 les réduisant, d'après la propriété de réduction. Donc, par universalité et uniformité, il existe des entiers e_0 et e_1 tels que $(m,n,x) \in Q^*_i \Leftrightarrow (e_i,m,n,x) \in P^{\omega^2\times\mathcal{X}} \Leftrightarrow (S^{\mathcal{X}}_2(e_i,m,n),x) \in P^{\mathcal{X}}$, pour $i \in 2$.

Donc, si A et B sont deux sous-ensembles coanalytiques effectifs de $\mathcal{X}$, tels que $A = P^{\mathcal{X}}_m$ et $B = P^{\mathcal{X}}_n$, alors leurs réduits seront $A^* = P^{\mathcal{X}}_{S^{\mathcal{X}}_2(e_0,m,n)}$ et $B^* = P^{\mathcal{X}}_{S^{\mathcal{X}}_2(e_1,m,n)}$.

Nous avons donc trouvé une formule effective pour les codes des réduits de deux ensembles coanalytiques effectifs. Il en résulte que la propriété de séparation des analytiques effectifs est elle-aussi uniforme.

1.3 Topologie de Gandy-Harrington

Définissons maintenant une nouvelle topologie, à partir de la hiérarchie effective. Celle-ci sera le centre des preuves effectives des théorèmes de dichotomie.

Définition 39. La **topologie de Gandy-Harrington** sur $\mathcal{X}$ est la topologie engendrée par les ensembles Σ^1_1.

La classe des ensembles Σ^1_1 étant stable par unions et intersections finies, elle forme donc une base dénombrable de la topologie de Gandy-Harrington. De plus, par le théorème de Lindelöff, tout ouvert dans cette topologie est une union dénombrable d'ensembles Σ^1_1, et donc un ensemble analytique.

Comme les ouverts de base de la topologie usuelle sur $\mathcal{X}$ sont des ensembles Σ^1_1, la topologie de Gandy-Harrington raffine la topologie usuelle, et est par conséquent séparée. Par contre, elle n'est pas polonaise. Mais nous verrons qu'il existe un ouvert dense sur lequel la topologie de Gandy-Harrington est polonaise.

Nous allons maintenant présenter quelques propriétés remarquables de la topologie de Gandy-Harrington. Pour ce faire, commençons par introduire des outils très utiles dans son étude : les jeux de Choquet et de Choquet fort.

1.3.1 Jeux de Choquet

Définition 40. Soit X un espace topologique. Le **jeu de Choquet** sur X est défini par :

$$\begin{array}{c|cccccccc} \mathrm{I} & U_0 & & U_1 & & U_2 & & ... & \\ \hline \mathrm{II} & & V_0 & & V_1 & & V_2 & ... \end{array}$$

A chaque tour, les joueurs choisissent des ouverts non vides U_n et V_n de X tels que, pour tout $n \in \omega$, $U_{n+1} \subseteq V_n \subseteq U_n$. A la fin d'un match, le joueur II gagne si et seulement si l'intersection $\bigcap_{n\in\omega} V_n$ est non vide.

On dit que X est un **espace de Choquet** si le joueur II a une stratégie gagnante dans le jeu de Choquet sur X. Et on dit que X est un **espace de Baire** si le joueur I n'a pas de stratégie gagnante dans ce même jeu.

Un espace de Choquet est donc un espace de Baire.

La proposition suivante, dont on peut trouver une preuve dans [Kec95], montre que la notion précédente d'espace de Baire correspond à la notion usuelle d'espace dans lequel le théorème de Baire s'applique.

Proposition(Oxtoby). *Soit X un espace topologique. Alors X est de Baire si et seulement si une intersection dénombrable d'ouverts denses de X est encore dense dans X.*

Nous allons maintenant définir une propriété plus forte que le fait d'être un espace de Choquet :

Définition 41. Soit X un espace topologique. Le **jeu de Choquet fort** sur X est défini par :

$$\begin{array}{c|cccccccc} \mathrm{I} & x_0, U_0 & & x_1, U_1 & & x_2, U_2 & & ... & \\ \hline \mathrm{II} & & V_0 & & V_1 & & V_2 & ... \end{array}$$

A l'étape n, le joueur I choisit un ouvert non vide U_n de X et un élément x_n de U_n. Le joueur II doit alors répondre par un ouvert non vide V_n inclus dans U_n, avec la contrainte que x_n doit appartenir à V_n aussi. Comme précédemment, le joueur II gagne si et seulement si l'intersection $\bigcap_{n\in\omega} V_n$ est non vide. Ce jeu est donc plus difficile pour le joueur II.

On dit alors que X est un **espace de Choquet fort** si le joueur II a une stratégie gagnante dans le jeu de Choquet fort sur X. Donc un espace de Choquet fort est aussi de Choquet.

Proposition 42. *Tout espace complètement métrisable est de Choquet fort.*

Énonçons maintenant une propriété de stabilité de la classe des espaces de Choquet fort :

Proposition 43. *Soit X est un espace de Choquet fort et $Y \subseteq X$ un G_δ de X. Alors Y est un espace de Choquet fort aussi.*

Théorème 44. *Soit X un espace polonais et Y une partie de X. Alors Y est polonais si et seulement si Y est un espace de Choquet fort.*

Les preuves de ces théorèmes sont détaillées dans [Kec95] et [Gao09].

Rappelons le théorème de métrisation d'Urysohn :

Théorème de métrisation d'Urysohn. *Soit X un espace topologique admettant une base dénombrable. Alors X est métrisable si et seulement si X est T_3, c'est-à-dire si, pour tout $x \in X$ et tout fermé F ne contenant pas x, il existe deux ouverts disjoints de X l'un contenant F et l'autre x.*

Théorème(Choquet). *Soit X un espace topologique. Alors X est polonais si et seulement si c'est un espace de Choquet fort, T_3 qui admet une base dénombrable.*

Démonstration. Le sens direct est immédiat avec la proposition 42.

Soit maintenant X un espace T_3 de Choquet fort admettant une base dénombrable. Par le théorème de métrisation d'Urysohn, X est alors métrisable. Soit donc d une distance compatible sur X. Considérons la complétion $(\hat{X}, \hat{d})$ de (X, d). C'est un espace polonais. Et X est un sous-espace de Choquet fort de $\hat{X}$. Donc par le théorème 44, X est polonais. $\square$

1.3.2 Propriétés de la topologie de Gandy-Harrington

Théorème 45. *L'espace de Baire muni de la topologie de Gandy-Harrington est un espace de Choquet fort.*

Démonstration. Décrivons une stratégie gagnante pour le joueur II dans le jeu de Choquet fort sur $\mathcal{N}$.

Rappelons pour cela que d'après la proposition 17, pour tout ensemble Σ^1_1 A, il existe un arbre récursif T sur $\omega \times \omega$ tel que $A = p[T]$.

Posons aussi, pour tout arbre T sur $\omega \times \omega$ et tout élément (s,t) de T, $T_{(s,t)} = \{(s',t') \in T | (s' \sqsubseteq s \text{ ou } s \sqsubseteq s') \text{ et } (t' \sqsubseteq t \text{ ou } t \sqsubseteq t')\}$. C'est un sous-arbre de T, qui est récursif si T l'est.

Supposons maintenant qu'au premier coup, I joue x_0, U_0. Choisissons un ouvert de base A_0 pour la topologie de Gandy-Harrington tel que $x_0 \in A_0 \subseteq U_0$, et un arbre récursif T_0 tel que $A_0 = p[T_0]$. Comme $x_0 \in p[T_0]$, il existe y_0 tel que $(x_0, y_0) \in [T_0]$. Posons alors $s_0 = x_0 \upharpoonright 1$ et $t^0_0 = y_0 \upharpoonright 1$. Le joueur II va alors jouer $V_0 = p[(T_0)_{(s_0,t^0_0)}]$. C'est bien un coup légal puisque V_0 est un ouvert pour la topologie de Gandy-Harrington vérifiant $x_0 \in V_0 \subseteq A_0 \subseteq U_0$.

Passons maintenant au coup suivant : supposons qu'alors le joueur I joue x_1, U_1. Comme $x_1 \in V_0$, il existe $y'_0 \in \mathcal{N}$ tel que $(x_1, y'_0) \in [(T_0)_{(s_0,t^0_0)}]$. Posons alors $s_1 = x_1 \upharpoonright 2$ et $t^0_1 = y'_0 \upharpoonright 2$. On a alors $s_0 \sqsubseteq s_1$ et $t^0_0 \sqsubseteq t_1$. Soient maintenant A_1 un ouvert de base tel que $x_1 \in A_1 \subseteq U_1$, et T_1 un arbre récursif tel que $A_1 = p[T_1]$, et $y_1 \in \mathcal{N}$ tel que $(x_1, y_1) \in [T_1]$. Remarquons qu'on a $s_0 \sqsubseteq x_1$. Posons alors $t^1_0 = y_1 \upharpoonright 1$, de sorte que $x_1 \in p[(T_1)_{(s_0,t^1_0)}]$. Le joueur II va alors jouer $V_1 = p[(T_0)_{(s_0,t^0_1)}] \cap p[(T_1)_{(s_0,t^1_0)}$. C'est aussi un coup légal puisque $x_1 \in V_1 \subseteq A_1 \subseteq U_1$.

Et ainsi de suite : pour tout $n \in \omega$, on construit un arbre récursif T_n sur $\omega \times \omega$, des suites finies s_n et $t^n_0 \sqsubseteq t^n_1 \sqsubseteq ...$ tels que :

- $s_n \sqsubseteq s_{n+1}$
- $x_n \in A_n = p[T_n] \subseteq U_n$
- $|s_n| = n+1$
- $s_n \sqsubseteq x_n$
- $(s_k, t^n_k) \in T_n$ pour tout $k < n$

On définit alors le n-ième coup de II par :

$$V_n = p[(T_0)_{(s_n,t^0_n)}] \cap p[(T_1)_{(s_{n-1},t^1_{n-1})}] \cap ... \cap p[(T_n)_{(s_0,t^n_0)}]$$

C'est toujours un coup légal.

Montrons maintenant que cette stratégie est gagnante pour II. Posons $x = \bigcup_{n\in\omega} s_n$ et pour tout $n \in \omega$, $y_n = \bigcup_{k<n} t^n_k$. On a alors, pour tout $n \in \omega$, $(s_k, t^n_k) \in T_n$ et donc $(x, y_n) \in [T_n]$, c'est-à-dire que $x \in p[T_n] = A_n$. Donc finalement, $x \in \bigcap_{n\in\omega} A_n \subseteq V_n$, et l'intersection est non vide, ce qui achève la démonstration. ☐

Exhibons un espace canonique sur lequel la topologie de Gandy-Harrington est polonaise :

Définition 46. Définissons l'espace X_{low} par : $X_{low} = \{x \in \mathcal{N} | \omega_1^{CK(x)} = \omega_1^{CK}\}$.

Présentons quelques propriétés importantes de l'espace X_{low} avant de montrer que c'est bien l'espace recherché.

Montrons tout d'abord que l'espace X_{low} est un espace Σ^1_1, donc un ouvert de la topologie de Gandy-Harrington. Nous montrerons ensuite qu'il est dense.

Lemme 47. *L'ensemble* $\{(x,y) \in \mathcal{N}^2 | \omega_1^{CK(x)} \leqslant \omega_1^{CK(y)}\}$ *est* Σ^1_1.

Démonstration. D'après le théorème de Spector, pour tout $x \in \mathcal{N}$, $\omega_1^{CK(x)} = sup\{type(y) | y \in \Delta^1_1(x), y \in WO\}$. Donc la condition $\omega_1^{CK(x)} \leqslant \omega_1^{CK(y)}$ est équivalente à : $\forall u \in \Delta^1_1(x)$, $[u \in WO \Rightarrow \exists z, \exists f, (z$ est récursif en y et f est une bijection préservant l'ordre entre (ω, u) et $(\omega, z))]$.

La condition $u \in WO$ est Π^1_1 d'après la proposition 30, et la condition après l'implication est Σ^1_1. Donc par le théorème de Kleene, c'est une condition Σ^1_1. ☐

Corollaire 48. *L'ensemble* $\{(x,y) \in \mathcal{N}^2 | \omega_1^{CK(x)} < \omega_1^{CK(y)}\}$ *est* Π^1_1.

Démonstration. D'après le lemme précédent, son complémentaire est Σ^1_1. $\square$

Comme la classe des ensembles Σ^1_1 est stable par intersection, ces deux résultats impliquent que X_{low} est Σ^1_1, c'est donc un ouvert pour la topologie de Gandy-Harrington.

Nous allons maintenant introduire un ensemble remarquable, qui nous sera utile pour prouver que X_{low} est dense.

Définition 49. L'**ensemble de Kleene**, noté $\mathcal{O}$,et communément appelé **l'$\mathcal{O}$ de Kleene** est l'ensemble $\{e \in \omega | \{e\} \in WO\}$ des indices des bons ordres récursifs.

Remarque. Si T est un arbre récursif sur ω, il existe un indice $e \in \omega$ pour l'ordre $\leqslant^T_{KB}$ de Kleene-Brouwer sur T. De plus, la fonction $T \mapsto e$ est récursive. Donc T est bien fondé si et seulement si son indice associé e appartient à $\mathcal{O}$. Et le prédicat "T est bien fondé" est donc récursif en $\mathcal{O}$.

Théorème(Base de Kleene). *L'ensemble des éléments récursifs en* $\mathcal{O}$ *est dense dans* $\mathcal{N}$ *pour la topologie de Gandy-Harrington, c'est-à-dire que tout ensemble* Σ^1_1 *non vide contient un élément récursif en* $\mathcal{O}$.

Démonstration. Soit A un ensemble Σ^1_1 non vide. D'après la proposition 17, il existe un arbre récursif T tel que $x \in A \Leftrightarrow \exists y \in \mathcal{N}, \forall n \in \omega, (x \restriction n, y \restriction n) \in T$.

Posons, pour tout élément (s,t) de T, $T_{(s,t)} = \{(s',t') \in T | s \sqsubseteq s', t \sqsubseteq t'\}$. C'est un arbre récursif. Définissons aussi une fonction z à valeurs dans $\{0,1\}$ par : $z(s,t) = 1 \Leftrightarrow T_{(s,t)}$ est bien fondé. D'après la remarque précédente, z est récursive en $\mathcal{O}$.

Posons maintenant $T' = \{(s,t) \in T | z(s,t) = 0\}$. Alors T' est un arbre pruné récursif en $\mathcal{O}$ aussi. Soit (x,y) sa branche la plus à gauche dans l'ordre lexicographique. Elle est récursive en T' et donc en $\mathcal{O}$. Et donc x est récursif en $\mathcal{O}$, puisque les projections sont des fonctions récursives primitives. De plus $x \in A$, d'où le résultat. $\square$

Nous pouvons maintenant montrer que X_{low} est dense :

Théorème(Base de Gandy). *L'ensemble* X_{low} *forme une base pour les ensembles* Σ^1_1*, c'est-à-dire que tout ensemble* Σ^1_1 *non vide contient un élément de* X_{low}.

Démonstration. Soit A un ensemble Σ^1_1 non vide. Considérons l'ensemble $B = \{(x,y) \in \mathcal{N}^2 | x \in A$ et $y \notin \Delta^1_1\}$. Comme $(x,y) \in B \Leftrightarrow x \in A$ et $\forall z \in \Delta^1_1(x), y \neq z$, le théorème de Kleene montre que B est Σ^1_1.

Comme A est non vide et qu'il n'existe qu'un nombre dénombrable d'éléments dans $\Delta^1_1(x)$, l'ensemble B n'est pas vide non plus. Donc par le théorème de la base de Kleene, il existe x, y dans $\mathcal{N}$ tels que (x,y) est récursif en $\mathcal{O}$, $x \in A$ et $y \notin \Delta^1_1(x)$. On a donc $x \in \Delta^1_1(\mathcal{O})$, et y aussi. Mais alors $\mathcal{O} \notin \Delta^1_1(x)$ puisque $y \notin \Delta^1_1(x)$.

Montrons que x est dans X_{low}, ce qui donnera le résultat. Supposons que $\omega_1^{CK} < \omega_1^{CK(x)}$. Il existe donc un bon ordre u récursif en x d'ordre ω_1^{CK}. Ainsi, pour tout $e \in \omega$, $e \in \mathcal{O}$ si et seulement s'il existe une injection de $(\omega, \leqslant_{\{e\}})$ dans (ω, u) qui préserve l'ordre. Cela implique que $\mathcal{O} \in \Sigma^1_1(x)$. Mais comme $\mathcal{O}$ est Π^1_1, il est aussi $\Pi^1_1(x)$, et donc $\Delta^1_1(x)$, ce qui est exclu. Finalement, x est bien un élément de X_{low}. $\square$

Nous venons donc de construire un ensemble canonique, ouvert et dense dans la topologie de Gandy-Harrington. Nous allons maintenant montrer qu'en restreignant celle-ci à X_{low}, on obtient une topologie intéressante : montrons tout de suite qu'elle admet une base d'ouverts-fermés, puis nous verrons, comme promis, qu'elle est polonaise.

Théorème 50. *Soit* x *un élément de* $\mathcal{N}$*. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\omega_1^{CK(x)} = \omega_1^{CK}$

(ii) Pour tout ensemble Σ^1_1 A, $x \notin A \Rightarrow \exists B \in \Sigma^1_1, (x \in B$ *et* $A \cap B = \emptyset)$.

(iii) Pour tout ensemble Σ^1_1 A, $x \notin A \Rightarrow \exists B \in \Delta^1_1, (x \in B$ *et* $A \cap B = \emptyset)$.

Démonstration. $iii \Rightarrow ii$] L'implication est évidente.

$ii \Rightarrow i$] Supposons que $\omega_1^{CK(x)} \neq \omega_1^{CK}$. Considérons alors l'ensemble $A = X_{low}$, qui est Σ_1^1. On a donc $x \notin A$. Mais alors par ii, il existe un ensemble B Σ_1^1 tel que $x \in B$ et $A \cap B = \emptyset$. Cet ensemble étant non vide (il contient x), il devrait rencontrer A d'après le théorème de la base de Gandy, ce qui est exclu.

$i \Rightarrow iii$] Soit A un ensemble Σ_1^1 ne contenant pas x. D'après la proposition 17, il existe un arbre récursif T tel que $y \in A \Leftrightarrow \exists z, \forall n, (y \upharpoonright n, z \upharpoonright n) \in T$. Posons $T_x = \{s \in \omega^{<\omega} | (x \upharpoonright |s|, s) \in T\}$. C'est un arbre récursif en x, et bien fondé puisque $x \notin A$. Donc l'ordre de Kleene-Brouwer $\leqslant_{KB}^{T_x}$ sur T_x est un bon ordre. Soit γ son type. Comme T_x est récursif en x, $\gamma < \omega_1^{CK(x)} = \omega_1^{CK}$. Considérons alors l'ensemble suivant :

$$B = \{y \in \mathcal{N} | \text{ le type de l'ordre de Kleene-Brouwer sur } T_y \text{ est inférieur ou égal à } \gamma\}$$

Comme WO_γ^0 est Δ_1^1, B aussi. Et $x \in B$ par définition de γ. Mais pour tout $y \in A$, l'arbre T_y est mal fondé, donc y ne peut pas appartenir à B. Donc B est un ensemble qui convient. □

Ce théorème montre donc que tout ensemble Σ_1^1 est ouvert-fermé lorsqu'on l'intersecte avec X_{low}. Il en découle la 0-dimensionalité de X_{low}, et en particulier sa régularité. De plus, comme ces ensembles Σ_1^1 en forment une base dénombrable, X_{low} est métrisable par le théorème de métrisation d'Urysohn.

Montrons finalement qu'il est polonais.

Théorème 51. *L'espace X_{low} muni de la trace de la topologie de Gandy-Harrington est polonais.*

Démonstration. D'après le théorème 45, l'espace de Baire muni de la topologie de Gandy-Harrington est un espace de Choquet fort. Or X_{low} est un ouvert de $\mathcal{N}$, donc en particulier un G_δ, donc le théorème 43 montre que X_{low} est aussi un espace de Choquet fort. De plus, la topologie de Gandy-Harrington sur X_{low} admet une base dénombrable d'ouverts-fermés d'après le théorème 50, et est plus fine que la topologie usuelle, donc est séparée. D'après le théorème de Choquet, la topologie de Gandy-Harrington sur X_{low} est donc polonaise. □

2 Le théorème de Harrington-Kechris-Louveau : dichotomie de Glimm-Effros

Nous allons dans cette section ordonner la classe des relations d'équivalence puis trouver une relation d'équivalence minimale, E_0, au caractère non dénombrable. C'est la relation maximale qui est comparable avec toutes les autres.

2.1 Relations d'équivalence

2.1.1 Invariance

Définition 52. Soient E une relation d'équivalence sur X et A une partie de X. La E-**saturation** de A est l'ensemble $[A]_E = \{x \in X | \exists y \in A, xEy\}$ des éléments qui sont en relation avec un élément de A. On dit que A est E-**invariante** si $[A]_E = A$.

Etendons maintenant la propriété de séparation des analytiques effectifs en prenant en compte leurs saturations pour une relation d'équivalence donnée.

Lemme 53. *Soit E une relation d'équivalence Δ_1^1 sur $\mathcal{N}$. Soient A et B deux parties Σ_1^1. Si $[A]_E$ et $[B]_E$ sont disjointes, alors il existe un ensemble Δ_1^1 E-invariant tel que $A \subseteq C$ et $B \cap C = \emptyset$.*

Démonstration. D'après la propriété 18, les E-saturations de A et de B sont elles-aussi analytiques effectives. Par le théorème de séparation, il existe un ensemble Δ_1^1 C_0 qui sépare $[A]_E$ et $[B]_E$. Mais $[C_0]_E$ est aussi Σ_1^1 et disjoint de $[B]_E$. On peut donc appliquer encore une fois le théorème de séparation pour trouver un ensemble C_1 borélien effectif qui sépare $[C_0]_E$ et $[B]_E$. Et ainsi de suite. On obtient une suite $(C_n)_{n\in\omega}$ d'ensembles Δ^1_1 telle que, pour tout n, $A \subseteq [C_n]_E \subseteq C_{n+1}$ et $C_n \cap [B]_E = \emptyset$. L'ensemble $C = \bigcup_{n\in\omega} C_n = \bigcup_{n\in\omega}[C_n]_E$ est alors E-invariant et sépare A et B. Malheureusement, C n'est pas nécessairement Δ^1_1, puisque la classe Δ^1_1 n'est pas stable par union dénombrable quelconque. Nous allons donc modifier le raisonnement précédent pour obtenir un ensemble Δ^1_1, en construisant la suite précédente de manière effective.

Soit $U \subseteq \omega \times \mathcal{N}$ un ensemble Σ^1_1 universel provenant d'un système universel uniforme $\{U^{\mathcal{X}}\}$ (les complémentaires des éléments d'un système universel Π^1_1 uniforme).

Nous avons montré, après le théorème 38, que le théorème de séparation était uniforme, c'est-à-dire qu'il existait des fonctions récursives f et g de ω^2 dans ω telles que, si U_n et U_m sont disjoints, $U_{f(n,m)} = \mathcal{N} \setminus U_{g(n,m)}$ est un ensemble Δ^1_1 qui les sépare. De plus, la fonction qui à un analytique effectif associe sa E-saturation est également uniforme. En effet, posons $B = \{(n,x) \in \omega \times \mathcal{N}\} \mid \exists y \in U_n, xEy\}$. C'est un sous-ensemble Σ^1_1 de $\omega \times \mathcal{N}$, donc, par universalité et uniformité, il existe un entier e_0 tel que :

$$\begin{aligned}(n,x) \in B &\Leftrightarrow (e_0, n, x) \in U^{\omega\times\mathcal{N}} \\ &\Leftrightarrow (S^{\mathcal{N}}_1(e_0,n), x) \in U^{\mathcal{N}}\end{aligned}$$

où $S^{\mathcal{N}}_1$ est la fonction récursive de la définition 37. La fonction $h : \omega \to \omega$ définie par $h(n) = S^{\mathcal{N}}_1(e_0, n)$ est récursive, et vérifie alors : $U_{h(n)} = [U_n]_E$.

Adaptons maintenant le raisonnement précédent. Commençons par trouver un entier p_0 qui code $[B]_E$, c'est-à-dire tel que $[B]_E = U_{p_0}$. Séparons ensuite $[A]_E$ et $[B]_E$, comme précédemment, par un ensemble Δ^1_1 C_0, et fixons des codes n_0 et m_0 pour C_0 et son complémentaires. Nous allons, à partir des ces codes fixés, construire récursivement des codes pour les ensembles C_n précédents et leurs complémentaires. Définissons deux fonctions récursives k et k' de ω dans lui-même par :

$$\begin{cases} k(0) = n_0 \\ k(n+1) = f(h(k(n)), p_0) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} k'(0) = m_0 \\ k'(n+1) = g(h(k(n)), p_0) \end{cases}$$

Posons alors, pour tout n, $C_n = U_{k(n)}$ et $\mathcal{N} \setminus C_n = U_{k'(n)}$. Ces ensembles Δ^1_1 correspondent aux ensembles précédents. Définissons finalement $C = \bigcap_{n\in\omega} C_n$. C'est comme avant un ensemble E-invariant qui sépare A et B. Montrons qu'il est cette fois Δ^1_1 :

$$\begin{aligned}x \in C &\Leftrightarrow \exists n \in \omega, x \in U_{k(n)} \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \omega, x \notin U_{k'(n)}\end{aligned}$$

Ce sont respectivement des conditions Σ^1_1 et Pi^1_1, ce qui achève la démonstration.

□

2.1.2 Réductibilité

Dans toute cette partie, on fixe deux relations d'équivalence E et F sur des ensembles X et Y.

Définition 54. Une fonction f de X dans Y est une **réduction** de E à F si, pour tous x, y dans X, on a l'équivalence suivante :

$$xEy \Leftrightarrow f(x)Ff(y)$$

Si une telle fonction existe, on dit que E est **réductible** à F, ce qu'on note $E \leqslant F$.

Si de plus la réduction est injective, on l'appelle un **plongement** et on note $E \sqsubseteq F$.

Remarques. – Intuitivement, dire que E est réductible à F signifie que l'on peut classifier les éléments de X, à E-équivalence près, par des classes de F.
– La réductibilité définit ainsi un pré-ordre sur la classe des relations d'équivalence.

Nous allons demander aux réductions d'avoir quelques propriétés topologiques plus intéressantes, pour pouvoir mieux étudier l'ordre associé. Nous supposons pour cela que X et Y sont des espaces polonais.

Définition 55. On dit que E est **boréliennement réductible** à F, et on note $E \leqslant_B F$, s'il existe une réduction borélienne de E à F.

Si de plus la réduction est injective, on note alors $E \sqsubseteq_B F$.

Présentons maintenant une propriété des relations d'équivalence qui exprime que celle-ci n'est pas trop "compliquée".

Définition 56. La **relation identité** sur un ensemble X, notée $id(X)$, est la relation d'équivalence définie par $(x, y) \in id(X) \Leftrightarrow x = y$.

On dit que E est **lisse** si E est boréliennement réductible à la relation identité sur 2^ω : si $E \leqslant_B id(2^\omega)$.

Donnons-en une caractérisation équivalente :

Définition 57. Soit $\mathcal{S}$ une famille de sous-ensembles de X. On dit que $\mathcal{S}$ est une **famille séparatrice** pour E si les éléments de $\mathcal{S}$ déterminent les classes d'équivalence de E : si, pour tous $x, y \in X$:

$$xEy \Leftrightarrow \forall S \in \mathcal{S}, (x \in S \Leftrightarrow y \in S)$$

On dit que $\mathcal{S}$ est une **famille séparatrice borélienne** (respectivement Δ^1_1) si tous les éléments de $\mathcal{S}$ sont boréliens (respectivement Δ^1_1).

Théorème 58. *Soit E une relation d'équivalence sur un polonais X. Alors E est lisse si et seulement si E admet une famille séparatrice borélienne dénombrable.*

Démonstration. $\Leftarrow$] Supposons que E admette une famille séparatrice borélienne dénombrable $\mathcal{S} = \{S_n | n \in \omega\}$. Définissons alors une fonction $f : X \to 2^\omega$ par : $f(x)(n) = 1 \Leftrightarrow x \in S_n$. Comme les S_n sont boréliens, la fonction f est borélienne. Et c'est une réduction de E à $id(2^\omega)$ puisqu'on a :

$$\begin{aligned} xEy &\Leftrightarrow \forall n \in \omega, (x \in S_n \Leftrightarrow y \in S_n) \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \omega, f(x)(n) = f(y)(n) \\ &\Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in id(2^\omega) \end{aligned}$$

□

$\Rightarrow$] Supposons que E soit lisse. Soit f une réduction borélienne de E à $id(2^\omega)$. Posons alors $S_n = \{z \in 2^\omega | f(z)(n) = 1\}$. Par le même raisonnement, l'ensemble $\{S_n | n \in \omega\}$ est une famille séparatrice borélienne de E.

2.1.3 Relation dérivée

Dans toute cette partie, E désigne une relation d'équivalence Σ^1_1 sur $\mathcal{N}$.

Définition 59. On définit la relation d'équivalence E^* **dérivée** de E par :

$$xE^*y \Leftrightarrow \text{ pour tout ensemble } C\ \Delta^1_1\ E\text{-invariant, } (x \in C \Leftrightarrow y \in C)$$

C'est bien une relation d'équivalence, qui contient E et qui admet une famille génératrice Δ^1_1.

Lemme 60. *La dérivée E^* de E est Σ^1_1.*

Démonstration. Reprenons le codage du théorème 34. On a alors :

$$xE^*y \Leftrightarrow \forall n[n \notin D \text{ ou } P_n^+ \text{ n'est pas } E\text{-invariant ou } (x \in P_n^+ \Leftrightarrow y \in P_n^+)]$$

On peut regrouper les deux premières conditions en une seule : $\exists w, z, (w \notin P_n^+$ et $z \notin P_n^-$ et wEz, qui est une condition Σ_1^1, puisque les P_n^+ et P_n^- sont Π_1^1 et que E est Δ_1^1.

La dernière condition peut s'écrire : $(x \in P_n^+ \Rightarrow y \notin P_n^-)$ et $(y \in P_n^+ \Rightarrow x \notin P_n^-)$, qui est aussi Σ_1^1.

Finalement, comme la classe Σ_1^1 est stable par quantification sur ω, la relation d'équivalence E^* est bien Σ_1^1. □

Nous allons maintenant donner des propriétés topologiques de la relation dérivée, en se plaçant dans les topologies de Gandy-Harrington : appelons τ la topologie de Gandy-Harrington sur $\mathcal{N}$ et τ_2 la topologie de Gandy-Harrington sur $\mathcal{N}^2$. Cette dernière est plus fine que la topologie produit $\tau \times \tau$, que nous noterons τ^2.

Lemme 61. *E^* est G_δ dans τ^2.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des ensembles Δ_1^1 et E-invariants. Comme la classe Δ_1^1 est dénombrable, $\mathcal{C}$ aussi. Et on a, par définition :

$$E^* = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} [(C \times C) \cup (\mathcal{N} \setminus C) \times (\mathcal{N} \setminus C)]$$

Donc E^* est une intersection dénombrable de produits d'ensembles Δ_1^1 donc en particulier ouverts dans τ. C'est donc un G_δ dans τ^2. □

Lemme 62. *E^* est l'adhérence de E relativement à τ^2.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que E^* est fermé dans τ^2. Pour cela, considérons un élément (x, y) n'appartenant pas à E^*. Par définition de E^*, il existe un ensemble C Δ_1^1 et E-invariant tel que $x \in C$ mais $y \notin C$. Posons alors $A = C$ et $B = \mathcal{N} \setminus C$. Ce sont tous les deux des ouverts de τ. De plus, ils vérifient $E^* \cap (A \times B) = \emptyset$. Donc $\mathcal{N} \setminus E^*$ est ouvert pour τ^2, et donc E^* est fermé.

Montrons maintenant que E est dense dans E^*. Il suffit de montrer que pour tous ensembles A et B Σ_1^1 dans $\mathcal{N}$, si $(A \times B) \cap E = \emptyset$, alors $(A \times B) \cap E^* = \emptyset$ aussi. Considérons donc deux tels ensembles. On a donc $[A]_E \cap [B]_E = \emptyset$. Par le lemme 53, il existe un ensemble C Δ_1^1 E-invariant tel que $A \subseteq C$ et $B \cap C = \emptyset$. Donc si $x \in A$ et $y \in B$, on a $x \in C$ mais $y \notin C$, et par définition de E^*, $x \not{E}^* y$. Donc on obtient bien que $(A \times B) \cap E^* = \emptyset$. □

2.2 Le théorème de Harrington-Kechris-Louveau

Nous allons présenter le théorème de Harrington-Kechris-Louveau, qui montre qu'en ordonnant les relations d'équivalence par la relation de réductibilité borélienne, E_0 est minimale non lisse.

Théorème(Harrington-Kechris-Louveau). *Soient X un espace polonais et E une relation d'équivalence borélienne sur X. Alors soit E est lisse soit $E_0 \sqsubseteq_c E$.*

Nous allons en fait démontrer la version effective de ce théorème, et on obtiendra le théorème précédent par relativisation, et par le théorème 58 :

Théorème 63. *Soit E une relation d'équivalence Δ_1^1 sur $\mathcal{N}$. Alors une et une seule des deux propositions suivantes est vraie :*

- *E admet une famille séparatrice Δ_1^1*
- *$E_0 \sqsubseteq_c E$*

La suite de cette partie est consacrée à la preuve du théorème 63.

Fixons une relation d'équivalence Δ^1_1 E sur $\mathcal{N}$.

Supposons tout d'abord que $E = E^*$. Alors E a une famille séparatrice Δ^1_1, et on obtient donc la première alternative du théorème.

Nous pouvons donc supposer que $E \neq E^*$ dans la suite de la preuve. Introduisons alors l'ensemble non vide $X = \{x \in \mathcal{N} | [x]_{E^*} \neq [x]_E\}$. Il est Σ^1_1 puisque $x \in X \Leftrightarrow \exists y(xE^*y \text{ et } x \not\!E y)$.

Nous aurons besoin pour conclure des deux lemmes suivants qui utilisent des arguments de catégorie dans E^*. C'est possible puisque, E^* étant G_δ dans l'espace de Choquet fort $(\mathcal{N}, \tau)$, il est aussi de Choquet fort, donc de Choquet et finalement de Baire.

Lemme 64. *Soient A et B deux parties Σ^1_1 de X, non vides. Alors si E est comaigre dans $(A \times B) \cap E^*$, alors $(A \times A) \cap E^* \subseteq E$.*

Démonstration. Considérons l'ensemble $Y = \{(x, y, z) \in A \times A \times B | xE^*yE^*z\}$ muni de la topologie $\tau_2 \times \tau$. Il est non vide puisque E est comaigre dans $A \times B$.

Comme dans le lemme 61, soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des ensembles Δ^1_1 et E-invariants. On a alors

$$Y = (A \times A \times B) \cap \bigcap_{C \in \mathcal{C}} [(C \times C \times C) \cup (\mathcal{N} \setminus C) \times (\mathcal{N} \setminus C) \times (\mathcal{N} \setminus C)]$$

donc Y est G_δ dans $\tau^2 \times \tau$, donc dans $\tau_2 \times \tau$ aussi puisque cette dernière est plus fine.

Posons maintenant $Y_1 = \{(x, y, z) \in Y | xEz\}$ et $Y_2 = \{(x, y, z) \in Y | yEz\}$. Comme E est comaigre dans $(A \times B) \cap E^*$, Y_1 et Y_2 sont comaigres dans Y.

Supposons maintenant qu'on n'ait pas $(A \times A) \cap E^* \subseteq E$, et considérons l'ensemble $Y_3 = \{(x, y, z) \in Y | x \not\!E y\}$, qui est alors non vide. Comme E est Δ^1_1, Y_3 aussi, et en particulier Σ^1_1, et ouvert dans $\tau_2 \times \tau$. Or l'intersection $Y_1 \cap Y_2$ est dense dans Y d'après le théorème de Baire dans E^*, donc elle rencontre Y_3. Mais si (x, y, z) est un élément de $Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3$, il vérifie xEz et yEz mais pas xEy, ce qui contredit la transitivité de E. □

Lemme 65. *E est dense et maigre dans $X^2 \cap E^*$ muni de τ^2.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que E est dense : comme X est Σ^1_1, X^2 est ouvert pour la topologie produit τ^2. De plus, par le lemme 62, E est dense dans E^*. Donc E est aussi dense dans $X^2 \cap E^*$.

Montrons maintenant que E y est maigre. Supposons le contraire. Alors il existe des parties Σ^1_1 A et B de X telles que E soit comaigre dans $(A \times B) \cap E^*$, et que ce dernier ensemble soit non vide. D'après le lemme 64, on a $(A \times A) \cap E^* \subseteq E$. Et on a donc aussi $([A]_E \times [A]_E) \cap E^* \subseteq E$.

À partir de cette inclusion, nous allons d'abord montrer que $[A]_E = [A]_{E^*}$, puis que pour tout $x \in A$, $[x]_E = [x]_{E^*}$, ce qui contredira l'inclusion de A dans X.

Supposons donc en premier lieu que $[A]_E \neq [A]_{E^*}$. Alors l'ensemble

$$Z = \{x \in [A]_{E^*} | \exists y \in [A]_E, (xE^*y \text{ et } x \not\!E y)\}$$

est non vide et Σ^1_1. Et il vérifie $(Z \times [A]_E) \cap E^* \neq \emptyset$ par définition. Comme E est dense dans $X^2 \cap E^*$, on a aussi $(Z \times [A]_E) \cap E \neq \emptyset$. Mais si (z, x) est un élément de cette intersection, il vérifie xEz et il existe $y \in [A]_E$ tel que zE^*y et $z \not\!E y$. Donc, par transitivité de E^*, on a xE^*y, c'est-à-dire que $(x, y) \in ([A]_E \times [A]_E) \cap E^* \subseteq E$, ce qui contredit la transitivité de E. D'où $[A]_E = [A]_{E^*}$.

Soient maintenant $x \in A$ et $y \in [x]_{E^*}$. Alors $y \in [A]_{E^*} = [A]_E$. Donc $(x, y) \in ([A]_E \times [A]_E) \cap E^* \subseteq E$, donc $y \in [x]_E$. Ceci donne finalement la contradiction qui achève la démonstration. □

Nous allons maintenant plonger la relation E_0 dans E de manière continue. Pour cela, nous construirons un schéma à la Cantor : nous obtiendrons une famille d'ensembles ouverts $(U_s)_{s \in 2^{<\omega}}$, et nous définirons un plongement f de 2^ω dans $\mathcal{N}$ par $\bigcap_{n \in \omega} U_{z \upharpoonright n} = \{f(z)\}$. Et contrairement à un schéma de Cantor classique, c'est la propriété de Choquet fort qui garantira que cette intersection est bien habitée. Nos ouverts seront donc les réponses d'une stratégie gagnante dans un jeu de Choquet fort, pour lequel on doit alors aussi définir les coups du premier joueur : $(x_s, V_s)_{s\in 2^{<\omega}}$. Mais on doit aussi s'assurer que la fonction f ainsi définie est bien un plongement de E_0 dans E.

Pour ce faire, commençons par introduire une relation R entre suites finies de même longueur, pour pouvoir ensuite imposer la condition suivante : si sRt, alors $x_s E x_t$.

Définition 66. Soient s et t deux suites binaires finies de même longueur. Soit k un entier. On définit une relation R_k par :

$$sR_kt \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i < k, s(i) = t(i) = 0 \\ s(k) = 0 \text{ et } t(k) = 1 \\ \forall k < i < |s|, s(i) = t(i) \end{cases}$$

Posons $R = \bigcup_{k\in\omega} R_k$.

Regroupons quelques propriétés élémentaires de ces relations dans le lemme suivant :

Lemme 67. *(i) Pour $k \neq k'$, les relations R_k et R'_k sont disjointes.*
(ii) Si sR_kt, alors pour tout $u \in 2^{<\omega}$, $(s \frown u)R_k(t \frown u)$.
(iii) Si sR_kt et $k < n < |s|$, alors $(s \restriction n)R_k(t \restriction n)$.
(iv) Pour tout entier n, on a : $R \cap (2^n \times 2^n) \subseteq \bigcup_{k<n} R_k$.
(v) Pour tout entier n, $R_{n-1} \cap (2^n \times 2^n)$ est un singleton.
(vi) Pour tout entier n, la relation d'équivalence engendrée par $R \cap (2^n \times 2^n)$ est $(2^n \times 2^n)$ tout entier.

D'après le point *vi* du lemme précédent, la condition requise deviendra la suivante : si s et t sont de même longueur, alors $x_s E x_t$.

Achevons maintenant la preuve du théorème :

Lemme 68. *Si $E \neq E^*$, alors $E_0 \sqsubseteq_c E$.*

Démonstration. Préparons tout d'abord le terrain pour la construction du schéma à la Cantor.

– Les espaces (X, τ) et $(X^2 \cap E, \tau_2)$ sont des espaces de Choquet fort. En effet, l'espace de Baire muni de la topologie de Gandy-Harrington est un espace de Choquet fort d'après le théorème 45, et X est ouvert pour cette même topologie, donc en particulier G_δ, donc le théorème 43 donne que (X, τ) est bien un espace de Choquet fort. De même pour $X^2 \cap E$. Nous pouvons donc fixer des stratégies gagnantes pour le joueur II dans les jeux de Choquet fort associés.
– D'après le lemme 65, la relation E est maigre dans $X^2 \cap E^*$ muni de τ^2. Il existe donc une suite décroissante $(W_n)_{n\in\omega}$ d'ouverts denses de $X^2 \cap E^*$ telle que $E \cap \bigcap_{n\in\omega} W_n = \emptyset$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que la diagonale de X est déjà disjointe de W_0.

Récapitulons : nous cherchons à construire par récurrence des suites $(x_s)_{s\in 2^{<\omega}}$ d'éléments de X, $(U_s)_{s\in 2^{<\omega}}$ et $(V_s)_{s\in 2^{<\omega}}$ d'ouverts de X pour la topologie τ, et $(E_{s,t})_{sRt}$ et $(F_{s,t})_{sRt}$ d'ouverts de $X^2 \cap E$ pour la topologie τ_2, qui vérifient, pour toutes suites finies s et t non vides, les conditions suivantes :

(a) $U_\emptyset = V_\emptyset = X$.

(b) Le match suivant est une instance du jeu de Choquet fort sur X dans laquelle II suit sa stratégie gagnante :

I	$x_{s\restriction 1}, V_{s\restriction 1}$		$x_{s\restriction 2}, V_{s\restriction 2}$		...		x_s, V_s	
II		$U_{s\restriction 1}$		$U_{s\restriction 2}$		...		U_s

En particulier, $x_s \in U_s \subseteq V_s$.

(c) $diam(V_s) \leqslant 2^{-|s|}$ dans la topologie métrique usuelle de $\mathcal{N}$.

(d) Si $|s| = |t| = n$, $s(n-1) = 0$ et $t(n-1) = 1$, alors $V_s \times V_t \subseteq W_n$.

(e) Si $|s| = |t| = n$ et sR_kt, alors le match suivant est une instance du jeu de Choquet fort sur $X^2 \cap E$ dans laquelle II suit sa stratégie gagnante :

I	$(x_{s\restriction k}, x_{t\restriction k}), F_{s\restriction k, t\restriction k}$		...	$(x_s, x_t), F_{s,t}$
II		$E_{s\restriction k, t\restriction k}$	...	$E_{s,t}$

(f) Pour sRt, $diam(F_{s,t}) \leqslant 2^{-|s|}$ dans la topologie usuelle de $\mathcal{N}^2$.

Supposons que ces suites aient été construites. Montrons alors qu'on obtient bien un plongement de E_0 dans E.

- Soit $z \in 2^\omega$. La condition b implique que $x_{z\restriction n}$, $V_{z\restriction n}$ et $U_{z\restriction n}$ forment une instance du jeu de Choquet fort sur X dans lequel II suit sa stratégie gagnante. On a donc, à la fin du match, $\bigcap_{n\in\omega} \neq \emptyset$. Par la condition c, cette intersection est un singleton. Définissons alors $f(z)$ comme étant son unique élément. cela définit une application continue et injective f de 2^ω dans X.
- Supposons maintenant que $y \not{E}_0 z$. y et z ont donc une infinité de coordonnées différentes, mettons une infinité de n tels que $y(n-1) = 0$ et $z(n-1) = 1$. La condition d donne alors que, pour une infinité d'entiers n, $V_{y\restriction n} \times V_{z\restriction n} \subseteq W_n$. Comme la suite $(W_n)_{n\in\omega}$ est décroissante, cela implique que $(f(y), f(z)) \in \bigcap_{n\in\omega} W_n$, et donc n'est pas dans E.
- Montrons enfin, par récurrence sur n, que pour toutes suites s et t de longueur n, et pour tout $z \in 2^\omega$, on a $f(s \frown z) E f(t \frown z)$. Si $n = 0$, c'est évident puisque E est réflexive. Supposons maintenant que le résultat soit vrai pour des suites de longueur n, et soient s et t deux suites de longueur $n+1$. Elles s'écrivent $s = s' \frown i$ et $t = t' \frown j$, avec $i, j \in 2$ et s', t' de longueur n. Soit aussi $z \in 2^\omega$. Si $i = j$, alors $i \frown z = j \frown z$ et on peut appliquer directement l'hypothèse de récurrence. Sinon, mettons que $i = 0$ et $j = 1$ (le contraire découlera de la symétrie de E). Par l'hypothèse de récurrence, on a $f(s' \frown 0 \frown z) E f(\vec{0} \frown 0 \frown z)$ et $f(t' \frown 1 \frown z) E f(\vec{0} \frown 1 \frown z)$. Par transitivité de E, il suffit de montrer que $f(\vec{0} \frown 0 \frown z) E f(\vec{0} \frown 1 \frown z)$. Pour cela, posons, pour tout entier k, $u_k = \vec{0} \frown 0 \frown z_{\restriction k}$ et $v_k = \vec{0} \frown 1 \frown z_{\restriction k}$. On a alors, pour tout k, $u_k R_{n+1} v_k$, donc (x_{u_k}, x_{v_k}), E_{u_k, v_k} et F_{u_k, v_k} forment une instance du jeu de Choquet fort dans laquelle II suit sa stratégie gagnante, d'après la condition e. Donc $\bigcap_{k\in\omega} E_{u_k, v_k}$ est non vide, et est un singleton, par f. Son unique élément est, par construction, $(f(\vec{0} \frown 0 \frown z), f(\vec{0} \frown 1 \frown z))$, qui appartient donc à $X^2 \cap E$, d'où le résultat.

Démarrons enfin notre construction par récurrence sur la longueur de la suite s.

- Commençons par le cas $|s| = 1$. Comme W_1 est dense et ouvert dans $X^2 \cap E^*$, il existe des ouverts de base $V_{\langle 0\rangle}$ et $V_{\langle 1\rangle}$, non vides, de diamètre plus petit que $1/2$ dans la topologie usuelle, tels que $V_{\langle 0\rangle} \times V_{\langle 1\rangle} \subseteq W_1$. Cela satisfait donc la condition d. De plus, $E \cap (V_{\langle 0\rangle} \times V_{\langle 1\rangle})$ est non vide puisque E est dense dans $X^2 \cap E$, d'après le lemme 65. Soit donc $(x_{\langle 0\rangle}, x_{\langle 1\rangle})$ un élément de cette intersection. Choisissons un ensemble Σ^1_1 $F_{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle}$ qui contient $(x_{\langle 0\rangle}, x_{\langle 1\rangle})$ et de diamètre strictement inférieur à $1/2$ dans la topologie métrique. On obtient ensuite les ensembles $U_{\langle 0\rangle}$, $U_{\langle 1\rangle}$ et $E_{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle}$ en jouant aux jeux de Choquet fort. Les objets ainsi construits satisfont toutes les conditions requises.
- Supposons maintenant que la construction ait été faite jusqu'au rang n. Au rang $n+1$, il nous faut définir, pour s et t de longueur n, telles que sRt, et pour $i \in 2$, $x_{s\frown i}$, $V_{s\frown i}$, $F_{s\frown i, t\frown i}$ ainsi que $F_{\vec{0}\frown 0, \vec{0}\frown 1}$ d'après le lemme 67. Les ouverts $U_{s\frown i}$, $E_{s\frown i, t\frown i}$ et $E_{\vec{0}\frown 0, \vec{0}\frown 1}$ seront alors obtenus par la stratégie de II dans les jeux de Choquet.

  Si $|s| = |t| = n$ et sRt, on doit, pour pouvoir continuer à jouer, avoir $x_{s\frown i} \in U_s$, $x_{t\frown i} \in U_t$ et $(x_{s\frown i}, x_{t\frown i}) \in E_{s,t}$, pour tout $i \in 2$. Considérons alors l'ensemble suivant des candidats possibles, dans $X^{2^n} \times X^{2^n}$:

$$\begin{aligned} Y = \{((y_{s\frown 0})_{s\in 2^n}, (y_{s\frown 1})_{s\in 2^n}) \mid \forall s, t \in 2^n, \forall i \in 2, [&y_{s\frown i} \in U_s, y_{s\frown i} E^* y_{t\frown i} \\ &\text{et } (sRt \Rightarrow (y_{s\frown i}, y_{t\frown i}) \in E_{s,t})]\} \end{aligned}$$

  Y est un ouvert de $X^{2^n} \times X^{2^n}$ dans la topologie produit de Gandy-Harrington. Et il est non vide puisque $((x_s)_{s\in 2^n}, (x_s)_{s\in 2^n}) \in Y$.

  Nous voulons aussi satisfaire la condition d. Posons alors, pour s_0 et t_0 dans 2^n :

$$Y_{s_0,t_0} = \{((y_{s\frown 0})_{s\in 2^n}, (y_{s\frown 1})_{s\in 2^n}) \in Y | (y_{s_0\frown 0}, y_{t_0\frown 1}) \in W_{n+1}\}$$

Comme W_{n+1} est ouvert et dense dans $X^2 \cap E^*$, Y_{s_0,t_0} est un ouvert dense de Y. Alors l'intersection $\bigcap_{s,t\in 2^n} Y_{s,t}$ est elle aussi ouverte dense dans Y. Il existe donc des ensembles $V_{s\frown 0}, V_{t\frown 1}$ non vides, Σ^1_1, tels que :

$$\prod_{s\in 2^n} V_{s\frown 0} \times \prod_{t\in 2^n} V_{t\frown 1} \subseteq \bigcap_{s,t\in 2^n} Y_{s,t}$$

On peut supposer que, dans la topologie usuelle, les diamètres de $V_{s\frown 0}$ et de $V_{t\frown 1}$ sont inférieurs à 2^{-n-1}. Ainsi, on a déjà satisfait les conditions c et d.
De plus, comme E est dense dans $X^2 \cap E^*$, l'ensemble suivant

$$Y' = \{((y_{s\frown 0})_{s\in 2^n}, (y_{s\frown 1})_{s\in 2^n}) \in Y | (y_{\vec{0}\frown 0}, y_{\vec{0}\frown 1}) \in E\}$$

est dense dans Y aussi. Donc l'intersection $Y' \cap \prod_{s\in 2^n} V_{s\frown 0} \times \prod_{t\in 2^n} V_{t\frown 1}$ est non vide. Soit alors $((x_{s\frown 0})_{s\in 2^n}, (x_{s\frown 1})_{s\in 2^n})$ un élément de cette intersection.
Choisissons maintenant, pour toute paire (s,t) de suites de longueur n telle que sRt et pour tout $i \in 2$, un sous-ensemble $F_{s\frown i,t\frown i}$ Σ^1_1 de $X^2 \cap E$ contenant $(x_{s\frown i}, x_{t\frown i})$ et de diamètre plus petit que 2^{-n-1}. Et enfin, soit $F_{\vec{0}\frown 0,\vec{0}\frown 1}$ un ensemble Σ^1_1 dans $X^2 \cap E$ qui contient $(x_{\vec{0}\frown 0}, x_{\vec{0}\frown 1})$.
Cela achève la construction, et on vérifie que les conditions requises sont toutes satisfaites.

□

3 La $\mathcal{G}_0$- dichotomie

Historiquement, les dichotomies ont d'abord été exprimées principalement en termes de relations d'équivalence, puisque c'est ainsi que se présentent leurs applications. Cependant, les graphes offrent un cadre plus général et plus élégant à ces théorèmes. Nous allons ici présenter la $\mathcal{G}_0$-dichotomie, très proche de celle de Harrington-Kechris-Louveau, qui est plus ou moins sa version en termes de graphes. C'est un théorème très puissant, qui permet de montrer une bonne partie des autres dichotomies qui ressemblent à l'hypothèse du continu. Commençons tout d'abord par introduire des notions de théorie des graphes, avant de présenter le théorème en lui-même et une preuve une classique.

3.1 Le théorème

3.1.1 Graphes

Définition 69. Soit X un ensemble. Un **graphe** sur X est une relation binaire symétrique et irréflexive.

Si X est polonais, on dira qu'un graphe sur X est analytique, borélien,... si c'est un sous-ensemble analytique, borélien, etc de $X \times X$.

Si A est un sous-ensemble de X, et $\mathcal{G}$ un graphe sur X, la **restriction** de $\mathcal{G}$ à A, notée $\mathcal{G}_{\restriction A}$, est $\mathcal{G} \cap (A \times A)$.

Définition 70. Soient X et Y deux ensembles, et $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux graphes sur X et Y respectivement. Un **morphisme** de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{H}$ est une application $\varphi : X \to Y$ telle que, pour tous $x, y \in X$, $(x,y) \in \mathcal{G} \Rightarrow (\varphi(x), \varphi(y)) \in \mathcal{H}$.

Définition 71. Soient X un ensemble, A une partie de X et $\mathcal{G}$ un graphe sur X. On dit que A est **$\mathcal{G}$-discrète** si $\mathcal{G}_{\restriction A} = \emptyset$.

Un **α-coloriage** de $\mathcal{G}$ est une fonction $c : X \to \alpha$ telle que pour tout $\beta \in \alpha$, $c^{-1}(\{\beta\})$ soit $\mathcal{G}$-discrète.

Définition 72. Soient X un ensemble et $\mathcal{G}$ un graphe sur X. Le **nombre chromatique** de $\mathcal{G}$ est le plus petit ordinal α tel qu'il existe un coloriage de $\mathcal{G}$ en α couleurs. On le note $\chi(\mathcal{G})$.

Si X est polonais, le **nombre chromatique borélien** de $\mathcal{G}$ est le plus petit ordinal α tel qu'il existe un coloriage borélien de $\mathcal{G}$ en α couleurs. On le note $\chi_B(\mathcal{G})$.

Remarque. Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux graphes sur des ensembles polonais. Si φ est un morphisme borélien de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{H}$, et c un ω-coloriage borélien de $\mathcal{H}$, alors $c \circ \varphi$ est un ω-coloriage borélien de $\mathcal{G}$.

On rappelle ici un théorème très utile de séparation de deux analytiques par un borélien. Cette séparation peut se faire de manière constructive.

Théorème(Séparation de Lusin). *Soit X un espace polonais. Soient A et B deux parties analytiques disjointes de X. Alors il existe un borélien C qui les sépare : $A \subseteq C$ et $B \cap C = \emptyset$.*

Proposition 73. *Soient X un espace polonais, $\mathcal{G}$ un graphe analytique sur X et A une partie $\mathcal{G}$-discrète de X. Si A est analytique, alors il existe un borélien B $\mathcal{G}$-discret contenant A.*

Démonstration. Comme A est $\mathcal{G}$-discrète, on a $A \cap \pi_1(\mathcal{G} \cap (X \times A)) = \emptyset$. Ces deux ensembles étant analytiques, on peut les séparer par un borélien A_1. On a donc $A_1 \times A) \cap \mathcal{G} = \emptyset$, ce qu'on peut réécrire $A \cap \pi_2(\mathcal{G} \cap (A_1 \times X)) = \emptyset$. On applique encore une fois le théorème de séparation, ce qui nous donne un borélien A_2 contenant A et tel que $(A_1 \times A_2) \cap \mathcal{G} = \emptyset$. Alors l'ensemble $A_1 \cap A_2$ est borélien, $\mathcal{G}$-discret et contient A. $\square$

Mentionnons aussi l'analogue effectif de cette dernière proposition :

Proposition 74. *Soient $\mathcal{G}$ un graphe Σ^1_1 sur $\mathcal{N}$ et A une partie $\mathcal{G}$-discrète de $\mathcal{N}$. Si A est analytique effectif, alors il existe un ensemble B Δ^1_1 et $\mathcal{G}$-discret contenant A.*

Démonstration. C'est la même preuve, en remplaçant le théorème de séparation de Lusin par le corollaire 27. $\square$

3.1.2 Le graphe $\mathcal{G}_0$

Définition 75. Soit I un sous-ensemble de $2^{<\omega}$. On dit que I est dense s'il vérifie les deux propriétés suivantes :
- $\forall n \in \omega, \exists! s \in I, |s| = n$
- $\forall s \in 2^{<\omega}, \exists t \in I, s \sqsubseteq t$

Fixons maintenant un ensemble I dense.

On peut, par la première propriété ci-dessus, énumérer ainsi les éléments de I : $I = \{s_n | n \in \omega\}$, avec, pour tout n, s_n de longueur n.

Définition 76. On définit sur 2^ω le graphe $\mathcal{G}_0$ par :

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{G}_0 \Leftrightarrow \exists s \in I, \exists t \in 2^\omega, \exists i \in 2, \alpha = s \frown i \frown t \text{ et } \beta = s \frown (1-i) \frown t$$

Remarquons que E_0 est la relation d'équivalence engendrée par le graphe $\mathcal{G}_0$.

Proposition 77. *Soit A une partie Baire-mesurable et non maigre de 2^ω. Alors A n'est pas $\mathcal{G}_0$-discrète.*

Démonstration. Comme A n'est pas maigre, il existe un ouvert non vide dans lequel A est comaigre. Donc il existe une suite $t \in 2^{<\omega}$ telle que A soit comaigre dans N_t. Puisque I est dense, il existe un entier n tel que $t \sqsubseteq s_n$, et donc A est aussi comaigre dans N_{s_n}.

Considérons l'application φ qui remplace la n-ième coordonnée i d'une suite de 2^ω par $1-i$. C'est un homéomorphisme qui fixe N_{s_n}. Alors A et $\varphi(A)$ sont tous les deux comaigres dans N_{s_n}. Par Baire, on a alors $A \cap \varphi(A) \cap N_{s_n} \neq \emptyset$. Il existe donc $x \in 2^\omega$ tel que $s_n \frown 0 \frown x$ et $s_n \frown 1 \frown x$ soient dans A, ce qui montre que A n'est pas $\mathcal{G}_0$-discrète. $\square$

Corollaire 78. *Le graphe $\mathcal{G}_0$ n'admet pas de ω-coloriage borélien.*

Démonstration. Supposons que c soit un ω-coloriage borélien de $\mathcal{G}_0$. Comme $2^\omega = \bigcup_{i\in\omega} c^{-1}(\{i\})$, par Baire, il existe i tel que $c^{-1}(\{i\})$ soit non maigre. De plus, puisque c est borélien, $c^{-1}(\{i\})$ est borélienne et en particulier Baire-mesurable. La proposition précédente donne que $c^{-1}(\{i\})$ n'est pas $\mathcal{G}_0$-discrète, ce qui est exclu. □

3.1.3 La $\mathcal{G}_0$-dichotomie

Nous pouvons maintenant présenter la $\mathcal{G}_0$-dichotomie. Nous pouvons en fait, comme précédemment, ordonner la classe des graphes par la relation d'existence d'un morphisme continu entre deux graphes. Le théorème de $\mathcal{G}_0$-dichotomie dit que $\mathcal{G}_0$ est le plus petit graphe analytique, pour cet ordre, qui n'admet pas de coloriage borélien en ω couleurs.

Théorème(Kechris-Solecki-Todorcevic). *Soient X un espace polonais et $\mathcal{G}$ un graphe analytique sur X. Alors un et un seul des énoncés suivants est vrai :*
- *$\mathcal{G}$ admet un ω-coloriage borélien.*
- *Il existe un morphisme continu de $\mathcal{G}_0$ dans $\mathcal{G}$.*

Remarque. La remarque précédente, et le dernier corollaire montrent que ces deux clauses sont en effet mutuellement exclusives.

3.2 Une preuve classique

Nous allons présenter la preuve de Ben Miller sous la forme d'un jeu, dans lequel le premier joueur va essayer de construire, par approximations successives, un morphisme de graphes de $\mathcal{G}_0$ dans $\mathcal{G}$. Nous allons pour cela introduire plusieurs définitions qui permettront de préciser la notion d'approximation d'un morphisme de graphes.

Commençons tout d'abord par simplifier le problème en nous ramenant à l'espace de Baire $\mathcal{N}$.
Comme X est un espace polonais, il existe une surjection continue φ_X de $\mathcal{N}$ sur X. De même, comme $\mathcal{G}$ est analytique dans $X \times X$, il existe une surjection continue $\varphi_{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{G}$.

Définition 79. Une n-**approximation extérieure** est une paire (f, g) de fonctions, avec $f : 2^n \to \mathcal{N}$ et $g : 2^{<n} \to \mathcal{N}$, telle que, pour tous $k < n$, $t \in 2^{n-(k+1)}$:

$$\varphi_{\mathcal{G}}(g(t)) = (\varphi_X \circ f(s_n \frown 0 \frown t), \varphi_X \circ f(s_n \frown 1 \frown t))$$

Une approximation extérieure est donc une paire de fonctions (f, g) telle que $\varphi_X \circ f$ approxime un morphisme de graphes de $\mathcal{G}_0$ dans $\mathcal{G}$, et que g en soit le témoin.

A priori, il y a "beaucoup" d'approximations extérieures. On va donc les approcher à leur tour par des fonctions "dénombrables" :

Définition 80. Une n-**approximation intérieure** est une paire (u, v) de fonctions, avec $u : 2^n \to \omega^n$ et $v : 2^{<n} \to \omega^n$.

Comme promis, les approximations intérieures sont en nombre dénombrable. Enumérons-les : $\{p_n | n \in \omega\}$.

Comme notre premier joueur va construire des suites d'approximations intérieures de rangs croissants, nous allons définir la notion d'extension :

Définition 81. Soit (u, v) une n-approximation intérieure. Une **extension** de (u, v) est une m-approximation intérieure (u', v') telle que :
- $m \geqslant n$

– $\forall s \in 2^n, \forall s' \in 2^m, s \sqsubseteq s' \Rightarrow u(s) \sqsubseteq u'(s')$
– $\forall t \in 2^{<n}, \forall t' \in 2^{m-n}, v(t) \sqsubseteq v'(t \frown t')$
Quand $m = n + 1$, on parle d'1-extension.

A priori, une approximation intérieure n'a aucune raison d'approcher un morphisme de graphes. Pour garantir cela, nous allons définir une notion de compatibilité entre approximations intérieures et extérieures.

Définition 82. Une n-approximation extérieure (f, g) est dite **compatible** avec une n-approximation intérieure (u, v) si elle vérifie :
– $\forall s \in 2^n, u(s) \sqsubseteq f(s)$
– $\forall t \in 2^{<n}, v(t) \sqsubseteq g(t)$
c'est-à-dire si (u, v) approche bien (f, g), jusqu'à la n-ième coordonnée.

3.2.1 Jouons !

Considérons maintenant le jeu suivant :

$$\begin{array}{c|ccccccc} \mathrm{I} & q_0^0, q_0^1 & & q_1^0, q_1^1 & & q_2^0, q_2^1 & & \dots \\ \hline \mathrm{II} & & \epsilon_0 & & \epsilon_1 & & \epsilon_2 & \dots \end{array}$$

Au n-ième coup, le premier joueur choisit deux n-approximations intérieures q_n^0 et q_n^1, et le deuxième joueur choisit l'une des deux, c'est-à-dire qu'il joue un $\epsilon_n \in 2$.On demande de plus au premier joueur que, pour tout n, les approximations q_{n+1}^0 et q_{n+1}^1 soient des 1-extensions de $q_n^{\epsilon_n}$.

Le premier joueur gagne si et seulement si pour tout $n \in \omega$, il existe une n-approximation extérieure compatible avec $q_n^{\epsilon_n}$.

C'est un jeu fermé pour le joueur I. Par Gale-Stewart, il est donc déterminé.

3.2.2 Côté morphisme

Dans cette partie, on suppose que le joueur I a une stratégie gagnante dans le jeu précédent.

Considérons un match dans lequel le joueur I utilise sa stratégie gagnante. Les joueurs construisent donc une suite $(q_n^{\epsilon_n})_{n\in\omega} = ((u_n, v_n))_{n\in\omega}$ d'approximations intérieures telle que, pour tout $n \in \omega$, il existe une n-approximation extérieure compatible avec $q_n^{\epsilon_n}$.

Construisons alors à partir de cette suite d'approximations un morphisme continu de $\mathcal{G}_0$ dans $\mathcal{G}$.

Posons alors :

$$\begin{array}{rccc} \pi & : & 2^\omega & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ & & x & \longmapsto & \lim u_n(x_{\restriction n}) \end{array}$$

et pour tout $k \in \omega$:

$$\begin{array}{rccc} \pi_k & : & 2^\omega & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ & & x & \longmapsto & \lim v_{n+k+1}(x_{\restriction n}) \end{array}$$

Ces applications sont bien définies puisque les u_n et v_n sont compatibles (les $q_n^{\epsilon_n}$ sont des extensions les unes des autres), et que la longueur des suites $u_n(x_{\restriction n})$ et $v_{n+k+1}(x_{\restriction n})$ est croissante.

De plus, elles sont continues par construction.

Nous allons montrer que $\varphi_X \circ \pi$ est le morphisme de graphes recherché. Pour cela, il faut montrer que pour tous $k \in \omega$, $x \in 2^\omega$, on a :

$$(\varphi_X \circ \pi(s_k \frown 0 \frown x), \varphi_X \circ \pi(s_k \frown 1 \frown x)) \in \mathcal{G}$$

Il suffit donc d'en trouver un antécédent par $\varphi_{\mathcal{G}}$. Nous allons montrer que $\pi_k(x)$ convient, c'est-à-dire que pour tous $k \in \omega$, $x \in 2^\omega$, on a :

$$\varphi_{\mathcal{G}} \circ \pi_k(x) = (\varphi_X \circ \pi(s_k \frown 0 \frown x), \varphi_X \circ \pi(s_k \frown 1 \frown x))$$

Or les applications φ_X et $\varphi_{\mathcal{G}}$ sont continues, donc il suffit de montrer que pour tout voisinage ouvert $U \times V$ de $(\pi_k(x), (\pi(s_k \frown 0 \frown x), \pi(s_k \frown 1 \frown x)))$, il existe un point $(z, (z_0, z_1)) \in U \times V$ tel que :

$$\varphi_{\mathcal{G}}(z) = (\varphi_X(z_0), \varphi(z_1))$$

Pour un tel voisinage, il existe, par définition de π et de π_k, un entier n tel que :

$$N_{v_{n+k+1}(x_{\restriction n})} \subseteq U$$

$$\text{et } N_{u_{n+k+1}(s_k \frown 0 \frown x_{\restriction n})} \times N_{u_{n+k+1}(s_k \frown 1 \frown x_{\restriction n})} \subseteq V$$

Soit maintenant (f, g) une $(n+k+1)$-approximation extérieure compatible avec q_{n+k+1}.

Si on pose finalement : $z = g(x_{\restriction n})$, $z_0 = f(s_k \frown 0 \frown x_{\restriction n})$ et $z_1 = f(s_k \frown 1 \frown x_{\restriction n}$, on obtient le résultat.

Finalement, si le joueur I a une stratégie gagnante, il existe un morphisme continu de $\mathcal{G}_0$ dans $\mathcal{G}$.

3.2.3 Côté coloriage

Supposons maintenant que le joueur II a une stratégie gagnante σ dans le jeu précédent. Montrons que $\mathcal{G}$ admet alors un ω-coloriage borélien.

Nous allons pour cela considérer les positions perdantes pour le joueur I. Plus particulièrement, on ne va s'intéresser qu'aux matchs dans lesquels le joueur I choisit à chaque coup une même approximation, c'est-à-dire dans lesquels, pour tout $n \in \omega$, on a $q_n^0 = q_n^1$. Ainsi, la stratégie du joueur II n'intervient pas, et il gagne quand même tous les matchs. Ces positions perdantes sont donc de la forme : $(q_0, ...q_n)$, où q_n n'admet aucune 1-extension compatible avec une $(n+1)$-approximation extérieure. Une telle approximation intérieure est appelée terminale. Plus précisément :

Définition 83. Soient p une n-approximation intérieure et Y un sous-ensemble de X. On dit que p est **Y-terminale** si aucune 1-extension de p n'admet de $(n+1)$-approximation extérieure (f, g) compatible vérifiant de plus $\varphi_X \circ f(2^{n+1}) \subseteq Y$.

Introduisons maintenant une classe d'ensembles analytiques particuliers associés aux positions perdantes, qui seront $\mathcal{G}$-discrets :

Définition 84. Soient q une n-approximation intérieure et Y un borélien de X. On pose $A(q, Y) = \{\varphi_X \circ f(s_n) | (f, g)$ n-approximation extérieure compatible avec q telle que $\varphi_X \circ f(2^n) \subseteq Y\}$. C'est un ensemble analytique.

Proposition 85. *Soient q une n-approximation intérieure et Y un ensemble borélien. Si $A(q, Y)$ n'est pas $\mathcal{G}$-discret, alors q n'est pas Y-terminale.*

Démonstration. Comme $A(q, Y)$ n'est pas $\mathcal{G}$-discret, il existe deux n-approximations extérieures (f_0, g_0) et (f_1, g_1) compatibles avec q, vérifiant $\varphi_X \circ f_0(2^n), \varphi_X \circ f_1(2^n) \subseteq Y$, telles que $(\varphi_X \circ f_0(s_n), \varphi_X \circ f_1(s_n)) \in \mathcal{G}$.

Il existe donc $\alpha \in \mathcal{N}$ tel que $\varphi_{\mathcal{G}}(\alpha) = (\varphi_X \circ f_0(s_n), \varphi_X \circ f_1(s_n))$.

On veut construire une $(n+1)$-approximation extérieure compatible avec une extension de q.

Posons alors pour tous $s \in 2^n, t \in 2^{<n}, i \in 2$: $f(s \frown i) = f_i(s)$, $g(\emptyset) = \alpha$ et $g(t \frown i) = g_i(t)$. Ainsi définie, (f, g) est bien une $(n+1)$-approximation extérieure compatible avec q et vérifiant $\varphi_X \circ f(2^{n+1}) \subseteq Y$.

Alors, si on pose, pour tous $s \in 2^{n+1}, t \in 2^{<n+1}$, $u(s) = f(s)_{\restriction n+1}$ et $v(t) = g(t)_{\restriction n+1}$, on obtient une 1-extension de q compatible avec (f, g), ce qui montre que q n'est pas Y-terminale. □

Avec les notations de la propriété précédente, si q est Y-terminale, l'ensemble $A(q, Y)$ est un analytique $\mathcal{G}$-discret. Par la proposition 73, il existe un borélien $B(q, Y)$ $\mathcal{G}$-discret contenant $A(q, Y)$.

Pour toute position perdante $(q_0, ..., q_n)$, la dernière approximation q_n est par définition X-terminale. On peut donc considérer les boréliens $B(q_n, X)$. Posons

$$Y = \bigcup_{(q_0, ..., q_n) perdante} B(q_n, X)$$

Puisque les positions, et a fortiori les positions perdantes, sont en nombre dénombrable, Y est borélien. Comme $X = \bigcup_{(q_0,\ldots,q_n) perdante} B(q_n, X) \cup X \setminus Y$, il suffit de montrer que $X \setminus Y$ admet lui-même un coloriage borélien, puisqu'alors X sera une union dénombrable de boréliens $\mathcal{G}$-discrets.

Notons p l'unique 0-approximation intérieure.

Remarquons alors que si (p) est une position perdante, alors p est X-terminale, donc en particulier $X \setminus Y$-terminale. Par la proposition 85, l'ensemble $A(p, X \setminus Y)$ est $\mathcal{G}$-discret. De plus, on a : $dom(\mathcal{G}) \cap (X \setminus Y) \subseteq A(p, X \setminus Y)$, donc $X \setminus Y$ est $\mathcal{G}$-discret. Il existe donc un coloriage borélien de $\mathcal{G}$ en ω couleurs.

Nous allons essayer de nous ramener à une situation semblable.

Pour montrer que $X \setminus Y$ admet un coloriage borélien, nous allons, comme précédemment, essayer d'extraire une partie borélienne coloriable, jusqu'à épuiser tout l'ensemble : nous allons jouer dans $X \setminus Y$, puis recommencer. Plus précisément, pour tout ensemble $A \subset X$, on définit le jeu $G(A)$, qui se joue exactement comme notre jeu précédent, et dans lequel le joueur I gagne si et seulement si pour tout $n \in \omega$, il existe une n-approximation extérieure (f, g) compatible avec $q_n^{\epsilon_n}$ et telle que $\varphi_X \circ f(2^n) \subseteq A$. Donc notre jeu précédent est simplement $G(X)$. C'est toujours un jeu fermé, donc il est toujours déterminé.

Notons tout de suite que si A et B sont deux parties de X telles que $A \subseteq B$,et si le joueur II a une stratégie gagnante pour $G(B)$, alors il a aussi une stratégie gagnante pour $G(A)$. En effet, il peut réutiliser sa stratégie dans $G(A)$ puisque le jeu est le même. Il s'assure alors que dans tout match, il existera une position perdante pour I relativement à $G(B)$, c'est-à-dire une position B-terminale. Mais une position B-terminale est aussi A-terminale, donc la stratégie est encore gagnante. Donc dans notre cas, le joueur II gagne tous les matchs $G(A)$.

Comme avant, notons $Y(A) = \bigcup_{(q_0,\ldots,q_n) perdante} B(q_n, A)$. C'est une union dénombrable de boréliens $\mathcal{G}$-discrets, qui admet donc un coloriage.

Nous allons maintenant construire par récurrence transfinie une suite de jeux $G(X_\alpha)$, où $(X_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ est une décroissante de boréliens de X, sur lesquels il reste à trouver un coloriage borélien en ω couleurs. Formellement, posons $X_0 = X$ et $X_1 = X \setminus Y(X)$. Posons $c_1 : Y(X) \to \omega$ un ω-coloriage borélien de $Y(X)$. Nous allons aussi construire par récurrence une suite croissante de ω-coloriages boréliens $c_\alpha : X \setminus X_\alpha \to \omega \cdot \alpha$, pour α un ordinal dénombrable. Pour ce faire, supposons que X_α et c_α aient été construits. Posons $X_{\alpha+1} = X_\alpha \setminus Y(X_\alpha)$. Etendons maintenant c_α, c'est-à-dire colorions les points de $Y(X_\alpha)$. Considérons, pour tout $y \in Y(X_\alpha)$, le nombre $n(y) = min\{n | p_n$ est perdante pour $G(X_\alpha)$ et $y \in B(p_n, X_\alpha)\}$. Définissons donc $c_{\alpha+1} : X \setminus X_{\alpha+1} \to \omega \cdot (\alpha + 1)$ par $c_{\alpha+1}(x) = c(x)$ si $x \notin X_\alpha$ et $c_{\alpha+1}(x) = \omega \cdot \alpha + n(x)$ si $x \in Y(X_\alpha)$. Comme n est une fonction borélienne, $c_{\alpha+1}$ est un coloriage borélien qui étend c_α. Dans le cas limite, on prend l'union des coloriages précédents, et l'intersection des boréliens précédents.

Maintenant, considérons pour tout $n \in \omega$ le plus petit indice α_n tel que p_n soit perdante dans $G(X_{\alpha_n}$. Si un tel indice n'existe pas, on pose $\alpha_n = 0$. Posons alors $\beta = sup\{\alpha_n | n \in \omega\}$. Comme ω_1 est un cardinal successeur, c'est un cardinal régulier. Donc $\beta < \omega_1$.

Nous sommes maintenant prêts à conclure : si l'approximation p de rang 0 est perdante pour le jeu $G(X_\beta)$ (et nous allons montrer que c'est nécessairement le cas), c'est-à-dire si p est X_β-terminale, alors, comme avant, on a $dom(\mathcal{G}) \cap X_\beta \subseteq A(p, X_\beta)$, qui est $\mathcal{G}$-discret, donc en couplant c_β et une autre couleur, on obtient un ω-coloriage borélien de $\mathcal{G}$. Montrons maintenant que p est forcément X_β-terminale. Nous allons pour cela utiliser le lemme suivant, qui permettra, si p n'est pas X_β-terminale, de construire une stratégie gagnante pour I dans le jeu $G(X_\beta)$, ce qui contredira le fait que le joueur II en a une.

Lemme 86. *Soit q une n-approximation intérieure dont toutes les 1-extensions sont X_β-terminales. Alors q est elle-aussi X_β-terminale.*

Démonstration. Commençons par remarquer que les approximations X_β-terminales coïncident avec les approximations $X_{\beta+1}$-terminales, par définition de β. Nous allons donc montrer que q est $X_{\beta+1}$-terminale.

Supposons maintenant que q ne soit pas $X_{\beta+1}$-terminale. Il existe alors une $(n+1)$-approximation extérieure (f, g) compatible avec une 1-extension q' de q et à valeurs dans $X_{\beta+1} \subseteq X_\beta$. Comme q' est X_β-terminale, on a : $\varphi_X \circ f(s_{n+1}) \in A(q', X_\beta) \subseteq B(q', X_\beta)$. Or, par définition de $X_{\beta+1}$, on a : $B(q', X_\beta) \cap X_{\beta+1} = \emptyset$. Mais $\varphi_X \circ f(s_{n+1}) \in X_{\beta+1}$, ce qui est exclu. Donc finalement, q est bien $X_{\beta+1}$-terminale. $\square$

Ce lemme nous permet donc en effet, par récurrence de construire une suite d'approximations intérieures (q_n) telle que pour tout n, il existe une approximation extérieure (f, g) compatible avec q_n et vérifiant $\varphi_X \circ f(2^n) \subseteq X_\beta$) (puisque q_{n-1} n'est pas X_β-terminale et p non plus). C'est exactement la condition de victoire du jeu $G(X_\beta)$, lorsque le joueur I joue à chaque coup deux approximations identiques : les q_n.

Finalement, on a montré que si le joueur II avait une stratégie gagnante dans G, alors $\mathcal{G}$ admettait un coloriage borélien en ω couleurs.

3.2.4 Effectivement...

La $\mathcal{G}_0$-dichotomie a pour conséquence le théorème de Harrington-Kechris-Louveau, qui admet donc une preuve classique aussi. Inversement, la preuve effective précédente s'adapte très bien à la $\mathcal{G}_0$-dichotomie. Donnons une esquisse de cette preuve effective.

Considérons l'union de toutes les parties $\mathcal{G}$-discrètes et Σ^1_1 de $\mathcal{N}$. Par la proposition 74, c'est exactement l'union de toutes les parties $\mathcal{G}$-discrètes et Δ^1_1.

Si cette union recouvre $\mathcal{N}$ tout entier, alors il existe un coloriage Δ^1_1 en ω couleurs, puisqu'on peut coder les ensembles Δ^1_1 de manière effective (donc dénombrable) par le théorème 34.

Sinon, toujours en utilisant le codage du théorème 34, on peut montrer que le complémentaire Y de cette union est un ensemble Σ^1_1. Il nous faut alors construire un morphisme continu de $\mathcal{G}_0$ dans $\mathcal{G}$. On reprend pour ce faire l'idée du schéma de Cantor de la preuve du théorème de Harrington-Kechris-Louveau. Celui-ci définira pour toute suite $s \in 2^{<\omega}$ un ouvert effectif de Y et un élément x_s de U_s, selon un schéma de Cantor classique. Cela permettra, comme avant, de construire une fonction continue de 2^ω dans $\mathcal{N}$. Pour s'assurer qu'elle est bien un morphisme, nous allons encore utiliser un jeu de Choquet fort dans $Y \times Y$ pour définir des relations $R_{k,s}$ et $R'_{k,s}$, pour tout entier k et toute suite finie s. Ces relations correspondent aux $E_{s,t}$ et $F_{s,t}$ de la preuve de Harrington-Kechris-Louveau (d'une certaine manière, elles les engendrent, de même que $\mathcal{G}_0$ engendre E_0). On exigera alors que $(x_{s_k \frown 0 \frown s}, x_{s_k \frown 1 \frown s}) \in R_{k,s}$. Toute la construction se fait ensuite de la même façon que précédemment.

Remarque. La démonstration effective utilise de manière indispensable la dénombrabilité des classes effectives, mais l'argument final prend la forme d'un schéma de Cantor, donc à caractère parfait. Inversement, la preuve classique marche grâce à la récurrence finale, sur ω, ce qui est surprenant. Cependant, aucun lien entre les deux preuves ne saute aux yeux. Nous n'avons donc pas de piste canonique pour chercher de nouvelles preuves classiques à partir des preuves effectives existantes.

Références

[CL03] René Cori and Daniel Lascar. *Logique mathématique.* Dunod, 2003.

[Gao09] Su Gao. *Invariant Descriptive Set Theory.* CRC Press, 2009.

[HKL90] Leo Harrington, Alexander Kechris, and Alain Louveau. A Glimm-Effros Dichotomy for Borel Equivalence Relations. *Journal of the American Mathematical Society*, 1990.

[Kec95] Alexander Kechris. *Classical Descriptive Set Theory.* Springer, 1995.

[KST99] Alexander Kechris, Slawomir Solecki, and Stevo Todorcevic. Borel chromatic numbers. *Advances in Mathematics*, 1999.

[Mel09] Julien Melleray. Théorie descriptive des groupes, notes de cours, 2009.

[Mil09] Benjamin Miller. Forceless, ineffective, powerless proofs of descriptive dichotomy theorems. Logic colloquium, 2009.

[MK80] Donald Martin and Alexander Kechris. Infinite games and effective descriptive set theory. *Analytic sets*, 1980.

[Mos09] Yannis Moschovakis. *Descriptive Set Theory.* American Mathematical Society, second edition, 2009.