

MathàLyon - Mécanismes plans - Quelques preuves

Adriane Kaïchouh

Mickaël Kourganoff

Thomas Letendre

27 juillet 2013

L'atelier sur les mécanismes plans présente plusieurs mécanismes : le pantographe, l'additionneur et l'inverseur de Peaucellier-Lipkin. Les preuves que ces mécanismes réalisent bien ce que l'on attend d'eux sont très élémentaires, et n'utilisent que les programmes de géométrie du collège et de seconde. Concrètement, on utilise le théorème de Pythagore, la relation de Chasles et quelques connaissances sur les parallélogrammes. L'idée de ce document est de présenter ces démonstrations, que les professeurs pourront exploiter en faisant des exercices pour les élèves ayant participé à l'atelier. L'inverseur peut aussi être traité en utilisant les nombres complexes, ce qui peut être accessible pour des élèves de terminale S.

1 Le pantographe

Le premier mécanisme étudié est le pantographe, constitué de quatre barres rigides agencées comme sur la figure 1. Les articulations se situent aux points A' , B' , C et M . On impose les longueurs suivantes, où $L > l > 0$ (sur le mécanisme physique $L = 2l$) :

$$AC = BC = L, \quad A'C = BB' = B'M = L - l \quad \text{et} \quad AA' = A'M = B'C = l.$$

On va montrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{L}\overrightarrow{AB}$.

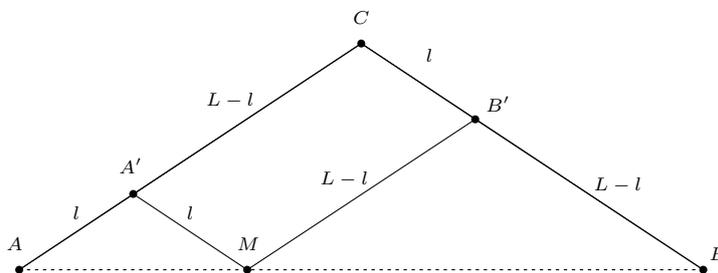


FIGURE 1 – Schéma du pantographe : les barres rigides correspondent aux segments $[AC]$, $[BC]$, $[A'M]$ et $[B'M]$.

Le quadrilatère $CA'MB'$ est un parallélogramme car $B'C = A'M$ et $A'C = B'M$. En particulier, $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{CB'} = \frac{1}{L}\overrightarrow{CB}$. Par ailleurs $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{L}\overrightarrow{AC}$. On a alors comme annoncé :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M} = \frac{1}{L}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{L}\overrightarrow{AB}.$$

Dans l'atelier, $\frac{1}{L} = \frac{1}{2}$ et M est donc le milieu de $[AB]$. Si A est l'origine de la droite réelle ou du plan complexe, le pantographe réalise donc la multiplication ou la division par 2.

Remarques. – Une fois que l'on a montré que $(A'M) \parallel (BC)$, on peut aussi argumenter que l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{L}$ envoie AMA' sur ABC .

– En choisissant un autre rapport $\frac{1}{L}$, on peut réaliser la multiplication et la division par n'importe quel réel positif.

2 L'additionneur

L'additionneur est construit à partir de deux pantographes tels que $\frac{l}{L} = \frac{1}{2}$. Ceux de l'atelier sont de même taille, mais ce n'est pas indispensable. Avec les notations de la figure 2, le point O est fixé à l'origine du plan, et les deux pantographes sont reliés par une articulation au niveau du point M . Le mécanisme réalise alors l'addition vectorielle dans le plan, on a $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OS}$.

On a vu dans la section 1 que M était le milieu de $[AB]$, c'est-à-dire $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$. Par ailleurs, M est aussi le milieu de $[OS]$, et comme O est l'origine : $\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OS}$. On a bien $\vec{OS} = \vec{OA} + \vec{OB}$.

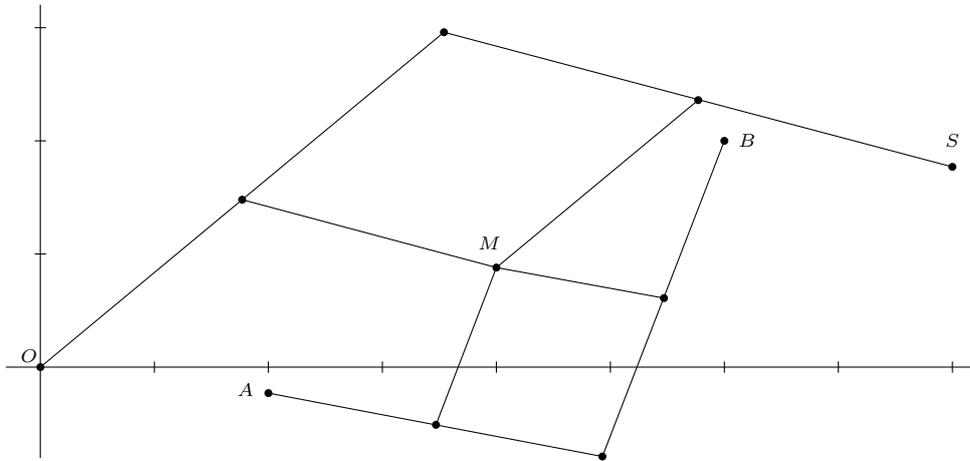


FIGURE 2 – Schéma de l'additionneur : M est le milieu de $[AB]$ et $[OS]$.

3 L'inverseur de Peaucellier-Lipkin

L'inverseur de Peaucellier-Lipkin est constitué de six barres assemblées comme sur le schéma 3. Notons $R = \sqrt{L^2 - l^2}$, où L et l sont les longueurs des différentes barres et $L > l$. On va montrer que les points M et M' sont images l'un de l'autre par l'inversion par rapport au cercle de centre O et de rayon R . Cela signifie que d'une part M et M' sont sur la même demi-droite issue de O , et d'autre part le produit des longueurs OM et OM' est constant et vaut R^2 .

On sait que $OA = OB = L$, $AM = BM = l$ et $AM' = BM' = l$. Les points O , M et M' sont donc tous les trois sur la médiatrice du segment $[AB]$, de même que le milieu C de $[AB]$. En particulier, O , C , M et M' sont alignés, et $(OC) \perp (AB)$.

En appliquant le théorème de Pythagore aux triangles ACM et ACO , on a $CM^2 = l^2 - AC^2$ et $OC^2 = L^2 - AC^2$, donc $CM < OC$.

Comme $AMBM'$ est un parallélogramme, le point C est aussi le milieu de $[MM']$, donc $CM' = CM < OC$. Ainsi M et $M' \in [OC]$.

Supposons que $OM \leq OM'$, l'autre cas est symétrique. On a alors, $OM = OC - CM$ et $OM' = OC + CM'$. En utilisant $CM = CM'$ et les valeurs de OC^2 et CM^2 obtenues précédemment :

$$OM \cdot OM' = (OC - CM) \cdot (OC + CM) = OC^2 - CM^2 = L^2 - l^2 = R^2.$$

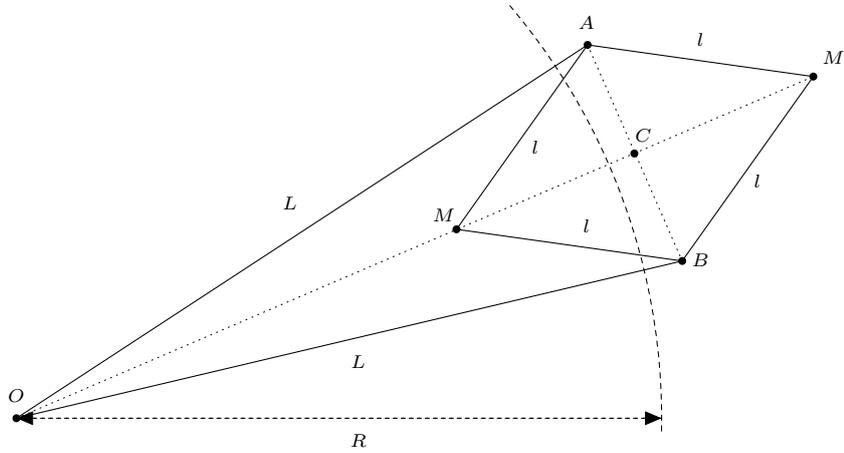


FIGURE 3 – Schéma de l'inverseur de Peaucellier-Lipkin : M et M' sont images l'un de l'autre par l'inversion par rapport au cercle de centre O et de rayon R .

Remarques. – Pour les élèves de lycée, on peut simplifier en utilisant les vecteurs. On dit que M et M' sont image l'un de l'autre par l'inversion si O , M et M' sont alignés et $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = R^2$.

Comme précédemment O , M et M' sont sur la médiatrice de $[AB]$ donc alignés. Puis, $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}) \cdot (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM'}) = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{CM}) = OC^2 - CM^2 = R^2$. Cela évite de prouver que l'ordre dans lequel O , M et M' sont alignés est celui que l'on attend. De plus on n'a plus à distinguer les cas selon qui de M et M' est le plus proche de O .

- On peut essayer de donner une intuition de ce qu'est l'inversion par rapport à un cercle en faisant un parallèle avec les symétries axiales, qui sont normalement bien connues des élèves (cercle/droite de points fixes, échange de deux domaines du plan ...).

4 Transformation d'un cercle en droite

Cette section présente ce que l'on peut dire de l'inverseur en utilisant les nombres complexes, elle est donc plutôt destinée aux élèves de terminale S. On suppose désormais que O est le point d'affixe 0 dans \mathbb{C} (ce n'est pas indispensable mais simplifie un peu les expressions).

Notons z l'affixe de M et w l'affixe de M' . À chaque position de M correspond une unique position de M' , on peut donc écrire $w = f(z)$ pour une certaine fonction f .

M et M' sont sur la même demi-droite issue de O , donc z et w ont même argument. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π , tel que $z = |z|e^{i\theta}$ et $w = |w|e^{i\theta}$. On sait aussi que $|z| \cdot |w| = R^2$. Mais $|z| \cdot |w| = w\bar{z}$, donc $w = f(z) = \frac{R^2}{\bar{z}}$.

L'inversion par rapport au cercle de centre O et de rayon R réalisée par le mécanisme est donc la fonction $f : z \mapsto \frac{R^2}{\bar{z}}$ de \mathbb{C}^* dans \mathbb{C}^* . Le fait que M et M' jouent des rôles symétriques dans le mécanisme se traduit par le fait que f est une involution : $f \circ f = id_{\mathbb{C}^*}$. En particulier on a aussi $z = f(w)$.

Remarques. – Si on choisit de fixer le centre d'inversion O au point d'affixe z_0 , on obtient par le même raisonnement une formule pour l'inversion par rapport au cercle de centre O et de rayon R , $f_{z_0} : z \mapsto z_0 + \frac{R^2}{z - z_0}$, qui est une involution de $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

- Une fois la formule établie, on voit que l'on peut prolonger f_{z_0} à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et formaliser l'idée que f_{z_0} échange z_0 et l'infini. Cela peut être l'occasion d'évoquer les homographies.

La fonction f est une homographie donc préserve la famille des cercles-droites de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Plus précisément, on sait que l'image d'un cercle passant par le centre d'inversion O est une droite (moralement un cercle passant par le point à l'infini). Dans le cas qui nous intéresse, on peut en faire une démonstration accessible à des élèves de terminale S.

Soit $r > 0$, on note \mathcal{C} le cercle centré au point d'affixe r et de rayon r . On va montrer que l'image de $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ par f est la droite verticale d'abscisse $\frac{R^2}{2r}$.

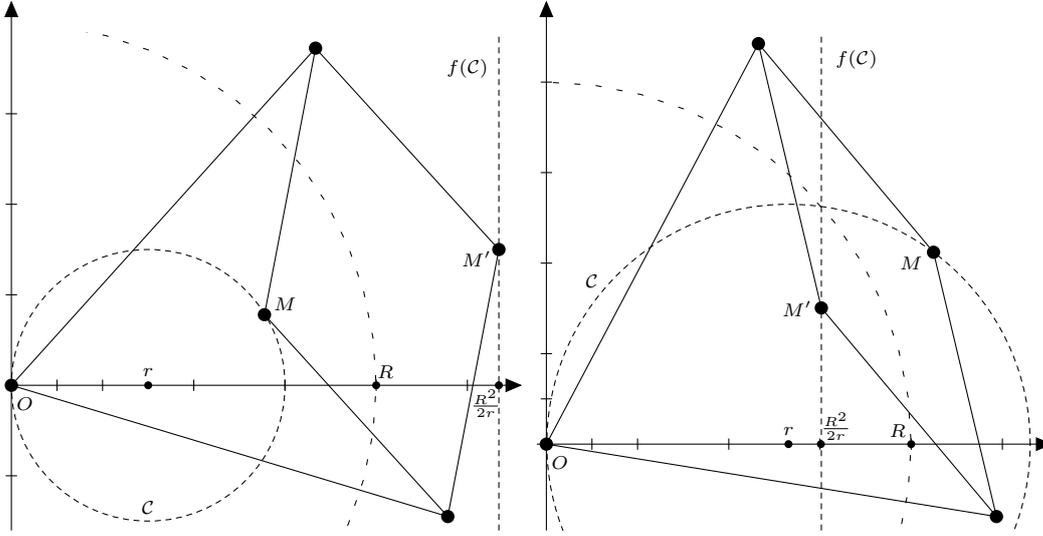


FIGURE 4 – Le cercle \mathcal{C} et son image par l'inversion f réalisée par l'inverseur de Peaucellier-Lipkin : à gauche dans le cas $2r < R$ et à droite dans le cas $2r > R$.

Remarque. Dans le cas limite $2r = R$, les courbes \mathcal{C} , $f(\mathcal{C})$ et le cercle d'inversion sont tangents, au point d'affixe R .

Une première approche est de paramétrer $\mathcal{C} \setminus \{0\}$, par exemple par $\gamma : \theta \mapsto r(1 + e^{i\theta})$ de $] -\pi; \pi[$ dans \mathbb{C}^* . L'image de $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ est alors paramétrée par $f \circ \gamma :] -\pi; \pi[\rightarrow \mathbb{C}^*$.

Pour tout $\theta \in] -\pi; \pi[$:

$$\begin{aligned} f(\gamma(\theta)) &= \frac{R^2}{r(1 + e^{i\theta})} = \frac{R^2}{r} \frac{1}{1 + e^{-i\theta}} = \frac{R^2}{r} \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}} = \frac{R^2}{2r} \frac{\cos(\frac{\theta}{2}) + i \sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})} \\ &= \frac{R^2}{2r} \left(1 + i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Une autre solution est de travailler avec une équation de \mathcal{C} . Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$z \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |z - r|^2 = r^2 \Leftrightarrow z\bar{z} - r(z + \bar{z}) = 0.$$

Soit $w \in \mathbb{C}^*$, $w \in f(\mathcal{C})$ si et seulement si $f(w) \in \mathcal{C}$, c'est-à-dire $\frac{R^4}{w\bar{w}} - r\left(\frac{R^2}{w} + \frac{R^2}{\bar{w}}\right) = 0$, car f est une involution. Alors, en multipliant cette équation par $\frac{w\bar{w}}{R^2} \neq 0$,

$$f(\mathcal{C} \setminus \{0\}) = \{w \in \mathbb{C}^* \mid R^2 - r(w + \bar{w}) = 0\} = \left\{ w \in \mathbb{C} \mid \Re(w) = \frac{R^2}{2r} \right\}.$$