MathàLyon - Mécanismes plans - Notice d'utilisation

Adriane Kaïchouh, Mickaël Kourganoff, Thomas Letendre

16 juillet 2013

Un mécanisme est un ensemble de tiges rigides jointes par des liaisons flexibles. Mathématiquement, on peut voir un mécanisme comme un graphe métrique, c'est-à-dire un graphe sur lequel chaque arête a une longueur donnée. Étudier la cinématique d'un mécanisme plan, c'est étudier l'ensemble des réalisations dans le plan de ce mécanisme, c'est-à-dire l'ensemble de ses réalisations dans le plan qui respectent les longueurs des arêtes.

En premier lieu, on se propose de construire et d'utiliser un pantographe. On sait qu'en 1603, l'astronome allemand Christoph Scheiner en utilisait déjà pour reproduire des dessins ou du texte en version plus petite, c'est-à-dire réaliser une homothétie. On fixe l'un des sommets à l'origine, O. Un second sommet b est totalement libre dans ses mouvements ; un troisième sommet c est toujours l'image du premier par une homothétie de centre O. Avec notre mécanisme, le rapport de l'homothétie sera $\frac{1}{2}$, mais il suffirait de changer les longueurs des arêtes pour obtenir d'autres rapports. On peut lire les positions des sommets lorsqu'ils se déplacent sur l'axe gradué : le mécanisme réalise alors une division par 2 dans les réels. On dit que c'est un *mécanisme fonctionnel* pour $x \longmapsto x/2$. Si l'on inverse le rôle des deux derniers sommets, on peut le voir comme un mécanisme fonctionnel pour $x \longmapsto 2x$.

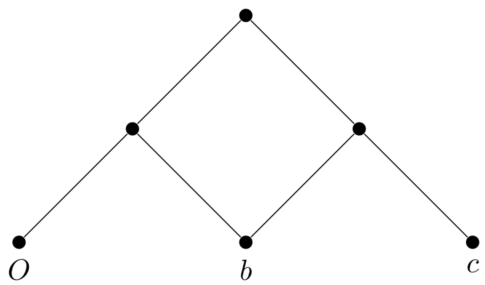

FIGURE 1 – Le pantographe.

Quelles fonctions peuvent être représentées par un mécanisme fonctionnel ? On sait donner une réponse exacte depuis le début des années 2000 : toutes celles dont le graphe est l'image d'un ensemble algébrique compact par une projection. En particulier, sur un segment, on peut construire les fonctions polynômes, les fonctions racine n-ième, toutes leurs composées... Nous proposons de construire l'additionneur, qui est fonctionnel pour $(x, y) \longmapsto x + y$. Il suffit de combiner deux pantographes (figure 2) : l'un calcule $\frac{x+y}{2}$ et l'autre multiplie le résultat par 2.

Intéressons-nous maintenant à un autre problème. On sait qu'un mécanisme formé d'une seule arête peut permettre de tracer un cercle, en fixant l'un des sommets et en laissant l'autre mobile. Est-il possible, avec un mécanisme plus complexe, de tracer une droite ? Cette question est restée longtemps ouverte. En 1784, Watt trouve une solution approximative : il en avait besoin pour construire son nouveau modèle de machine à vapeur, dite "à double action". Mais les mathématiciens continuent à chercher une solution exacte et, vers 1870, Peaucellier et Lipkin trouvent presque en même temps une solution, souvent appelée *inverseur de Peaucellier-Lipkin*. Leur mécanisme contient deux sommets particuliers : l'un est l'image de l'autre par une inversion par rapport à un cercle. Or l'image d'un cercle passant par le centre d'inversion est une droite ; il suffit donc de contraindre l'un des deux sommets à parcourir un tel cercle, ce que nous savons faire, pour que l'autre suive une ligne droite. Le cercle d'inversion, la ligne droite et son image par l'inversion sont tous trois tracés sur le plateau (figure 3). Vu comme un mécanisme fonctionnel, notre assemblage est fonctionnel pour $x \longmapsto 36/x$. On peut vérifier que, sur l'axe gradué, le produit de deux points est toujours 36 : par exemple, 6×6 ou 4×9.

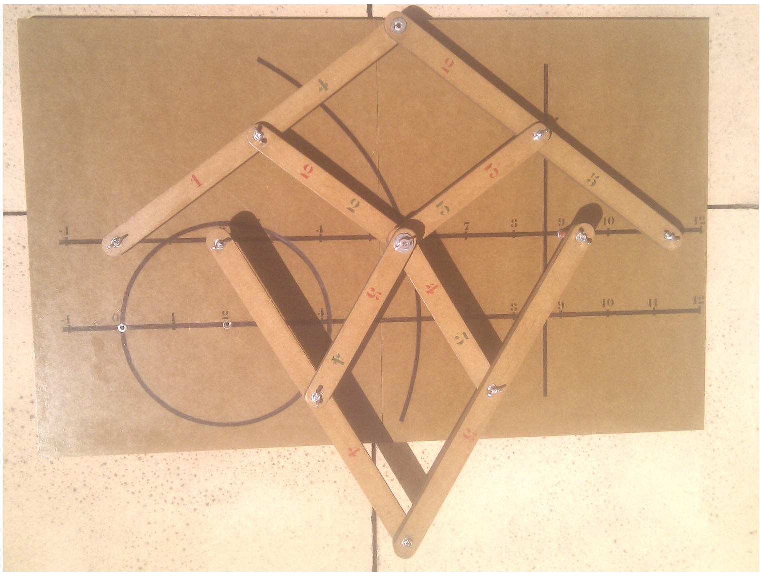

Figure 2 – L'additionneur est composé de deux pantographes : un en haut et un en bas. Pour la construction, les chiffres rouges indiquent la hauteur des tiges. Le chiffre 1 correspond à la barre la plus basse, elle n'est que légèrement surélevée par rapport au plateau.

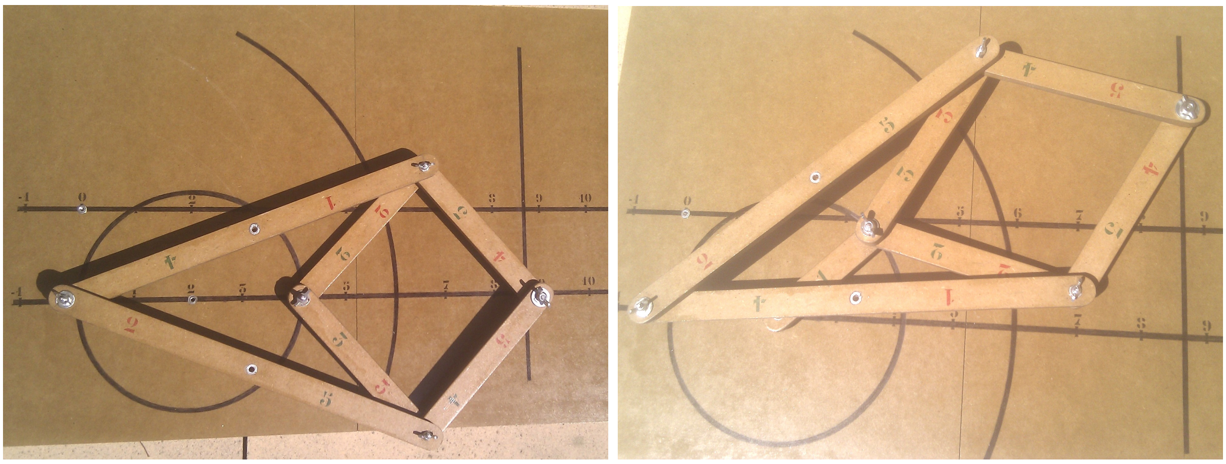

Figure 3 – L'inverseur de Peaucellier réalise une inversion par rapport à un cercle (photo de gauche). Les chiffres bleus indiquent la hauteur des tiges. En ajoutant la petite barre en bois notée 1 (photo de droite), on le transforme en un mécanisme qui trace une ligne droite.