L2- Informatique
UE : Statistiques pour l'informatique
Semestre automne 2018-2019

Correction contrôle continu no. 3

Exercice 1

1. On a pour $z \in \{0, \dots, 4\}$, $\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{\substack{x,y \\ x+y=z}} \mathbb{P}(X = x,\, Y = y) = \sum_{x=0}^{2} \mathbb{P}(X = x,\, Y = z - x)$.

   Supposons que les variables sont indépendantes, alors $\sum_{x=0}^{2} \mathbb{P}(X = x,\, Y = z - x) = \sum_{x=0}^{2} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = z - x) = \sum_{x=0}^{2} C_2^x p^x (1-p)^{2-x} C_2^{z-x} q^{z-x} (1-q)^{2-z+x}$.

   $\mathbb{P}(Z = 3) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2)\mathbb{P}(Y = 1) = 2pq^2(1-p) + 2p^2q(1-q)$.
2. Si $p = q$ alors Z suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2+2, p) = \mathcal{B}(4, p)$, son espérance est donnée par $\mathbb{E}(Z) = 4p$ et son écart type par $\sigma(Z) = 2\sqrt{p(1-p)}$

Exercice 2

1. Pour que le tableau corresponde à celui d'une loi de probabilité il faut que $\sum_{x,y} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = 1$.
   On a donc $a + b + 1/6 + 1/3 + 1/12 + 1/6 = 1$ si et seulement si $b = 1/4 - a$.

   Or, il faut que $0 \leq b \leq 1$ et $0 \leq a \leq 1$ donc on a $0 \leq a \leq 1/4$, c'est à dire, a est un réel qui se trouve dans l'intervalle $a \in (0\,;\, 1/4)$.
2. On sait que $X = 1$ si $(X = 1$ et $Y = 0)$ ou $(X = 1$ et $Y = 1)$ ou $(X = 1$ et $Y = 2)$ donc
   $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = a + 1/4$.
   D'une faqon similaire, on trouve :
   $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = b + 1/2$
   $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = a + b = a + 1/4 - 1 = 1/4$
   $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = 1/2$
   $\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = 1/4$.
3. Supposons que X et Y sont indépendantes. On remarque de la question précédente que
   $$\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(Y = 0)$$
   donc $a = \mathbb{P}(X = 1,\, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 2)$
   $= \mathbb{P}(X = 1,\, Y = 2) = 1/12$.

   On en conclut que si X et Y sont indépendantes alors $a = 1/12$, ou de faqon équivalente, si $a \neq 1/12$ alors X et Y ne sont pas indépendantes.
4. On pose $a = 1/12$, alors $b = 1/6$. On a :
   $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = a = 1/12$.
   $\mathbb{P}(Z = 2) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = 1/6 + 1/6 = 1/3$.
   $\mathbb{P}(Z = 3) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = 5/12$.
   $\mathbb{P}(Z = 4) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = 1/6$.

Exercice 3

1. Soit X le temps total d'attente, alors
   $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{6}\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)$
   $= \left(\frac{5}{6}\right)^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k} = \left(\frac{1}{5}\right)\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k} = \left(\frac{1}{5}\right)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k} =$
   $\left(\frac{1}{5}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{6}-(n+1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}+n\left(\frac{5}{6}\right)^{n}}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} = \left(\frac{1}{5}\right)\frac{\frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 6$, donc on a
   $$\mathbb{E}(X) = 6.$$

2. $\mathbb{P}(X \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 4) = 1 - \sum_{k=1}^{4}\mathbb{P}(X=k) \simeq 0,482.$

3. Soit X_1 le temps d'attente dans la caisse 1 et X_2 le temps d'attente dans la caisse 2, alors $X \geq 5$ si $X_1 \geq 5$ et $X_2 \geq 5$ donc $\mathbb{P}(X \geq 5) = \mathbb{P}(X_1 \geq 5,\ X_2 \geq 5) = \mathbb{P}(X_1 \geq 5)\mathbb{P}(X_2 \geq 5)$ car les caisses sont indépendantes. Or, les deux caisse suivent la même loi de probabilité donc $\mathbb{P}(X \geq 5) = (\mathbb{P}(X_1 \geq 5))^2$ qu'on avait déjà calculé dans la question 2, donc
   $$\mathbb{P}(X \geq 5) \simeq (0,482)^2 \simeq 0,232$$

Exercice 4

1. $p(x)$ est une densité si $\int_{\mathbb{R}} p(x)dx = 1$, or $\int_{\mathbb{R}} p(x)dx = \int_0^1 cx^4dx = c/5 = 1$ si et seulement si $c = 5$.

2. – $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xp(x)dx = \int_0^1 x \times 5x^4dx = 5/6$
   – $\mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2p(x)dx = \int_0^1 5x^6dx = 5/7$
   – $\mathbb{V}(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2p(x)dx - \mathbb{E}(X)^2 = 5/7 - 25/36 = 5/252 \simeq 0,0198$

3. – Si $t < 0$,
   $$F_{p(t)}(t) = \int_{-\infty}^{t} p(x)dx = 0$$
   – Si $0 \leq t \leq 1$,
   $$F_{p(t)}(t) = \int_{-\infty}^{t} p(x)dx = \int_{-\infty}^{0} p(x)dx + \int_0^t p(x)dx = 0 + \int_0^t 5x^4dx = t^5$$
   – Si $t > 1$
   $$F_{p(t)}(t) = \int_{-\infty}^{t} p(x)dx = \int_{-\infty}^{0} p(x)dx + \int_0^1 p(x)dx + \int_1^t p(x)dx = 1$$
   On trouve donc $F_{p(t)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^5 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$

4. On pose $Y = X^2$
   – Si $t < 0$, $F(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ car il est impossible qu'un carré soit plus petit qu'un nombre négatif.

– Si $0 \leq t \leq 1$, $F(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t})$, or

$$\mathbb{P}(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} p(x)dx = \int_{-\sqrt{t}}^{0} p(x)dx + \int_{0}^{\sqrt{t}} p(x)dx = \int_{0}^{\sqrt{t}} 5x^4 dx = (\sqrt{t})^5 = t^2\sqrt{t}$$

– Si $t > 1$ $F(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t})$, or

$$\mathbb{P}(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} p(x)dx = \int_{-\sqrt{t}}^{0} p(x)dx + \int_{0}^{1} p(x)dx + \int_{1}^{\sqrt{t}} p(x)dx = \int_{0}^{1} 5x^4 dx = 1$$

On trouve donc $F(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } t < 0 \\ t^2\sqrt{t} \quad \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 \quad \text{si } t > 1 \end{cases}$