Université Claude Bernard Lyon 1 — PCSI L2 UE MATH4
Année 2016-2017 — Printemps 2017
15 mai 2017

CONTRÔLE FINAL – 120 minutes

La transformée de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x) dx.$$

La transformée de Laplace de la fonction $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est

$$Y(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} u(t) dt.$$

On note $\chi_{[a,b]} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 1 - Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = e^{-a|x|} \chi_{[-1,1]}(x)$$

où $a > 0$.

Exercice 2 - On considère l'équation différentielle avec conditions initiales:

$$u''(t) - 3u'(t) + 2u(t) = e^{3t}, \quad u(0) = 1, u'(0) = 0$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$\frac{s^2 - 6s + 10}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s-2} + \frac{c}{s-3}$$

2. Soit Y la transformée de Laplace de u. Démontrer que :

$$Y(s) = \frac{s^2 - 6s + 10}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

3. En déduire u.

Exercice 3 -

1. Déterminer la distribution $T = \cos^2(x)\delta_0'$. Ici δ_0 est la distribution de Dirac en 0.
2. Déterminer la dérivée T' de la distribution $T = T_{x\chi_{[0,2]}(x)}$.

Exercice 4 - Soit

$$f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z(z^2+1)^2}$$

1. Déterminer les pôles avec leur ordre de f.
2. Déterminer le résidu en chaque pôle de f.
3. Soit $R > 0$. Tracer le chemin $\gamma_R : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_R(t) = Re^{it}$.

   En utilisant le théorème des résidus calculer $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z) dz$ pour $R = \frac{1}{2}$ et $R = 2$.