Correction du partiel du 6 mars

Exercice 1

a) L'intégrale présente deux problèmes de convergence : en 0 et en +∞.

Etude en 0 :

$$\frac{\log(t)}{1+t^2} \underset{0}{\sim} \log(t)$$

$$\int_a^1 \log(t)dt = [t\log(t)]_a^1 - \int_a^1 t \times \frac{1}{t}dt$$ par intégration par parties.

$$\int_a^1 \log(t)dt = [t\log(t) - t]_a^1 = -1 - a\log(a) + a \text{ et } \lim_{a\to 0} a\log(a) = 0$$

Donc l'intégrale $\int_0^1 \log(t)dt$ converge et $\frac{\log(t)}{1+t^2}$ est donc aussi intégrable en 0.

Etude en +∞ :

$\lim_{t\to+\infty} t^{1,5}\frac{\log(t)}{1+t^2} = 0$ donc il existe T tel que pour tout $t > T$, $\left|t^{1,5}\frac{\log(t)}{1+t^2}\right| \leq 1$

Donc pour $t > T$, $\left|\frac{\log(t)}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{t^{1,5}}$

On utilise le critère de Riemann avec $\alpha = 1,5$ en +∞, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\log(t)}{1+t^2}dt$ converge.

Conclusion : $\int_0^{+\infty} \frac{\log(t)}{1+t^2}dt$ est une intégrale convergente.

b) L'intégrale présente deux problèmes de convergence : en 0 et en +∞.

Etude en 0 :

Pour tout $t > 0$, $\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$

On utilise le critère de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2}$ en 0, donc, par comparaison, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}}dt$ converge.

Etude en +∞ :

Si t tend vers +∞, $\frac{1}{t}$ tend vers 0 et $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ donc $\sin\left(\frac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$.

Donc $\frac{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t\sqrt{t}}$.

On utilise le critère de Riemann avec $\alpha = 1,5$ en +∞, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}}dt$ converge.

Conclusion : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}}dt$ est une intégrale convergente.

Correction du partiel du 6 mars

Exercice 2

On pose $f(x,t)=\dfrac{e^{-xt}}{1+t}$ pour $(x,t)\in]0;+\infty[\times[0;+\infty[$. $F(x)=\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$.

a) Pour tout $x>0$, $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable en $+\infty$ (pas de problème en 0) car :

$\left|\dfrac{e^{-xt}}{1+t}\right|\le e^{-xt}$ et $t\mapsto e^{-xt}$ est intégrable en $+\infty$ pour $x>0$.

Donc $F(x)=\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ est bien définie sur $]0;+\infty[$.

b) On utilise le théorème de dérivation sous le signe intégrale sur $[a;+\infty[$.

Soit $a>0$,

- $F(x)=\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ est bien définie sur $[a;+\infty[$.
- $x\mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t}$ est dérivable sur $[a;+\infty[$ et $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}=\dfrac{-te^{-xt}}{1+t}$.
- Pour tout $x\in[a;+\infty[$, $\left|\dfrac{-te^{-xt}}{1+t}\right|\le e^{-xt}\le e^{-at}$ et la fonction $t\mapsto e^{-at}$ est absolument intégrable sur $[0;+\infty[$ (et cette fonction ne dépend pas de x).

On déduit alors du théorème de dérivation sous le signe intégrale que la fonction F est dérivable sur $[a;+\infty[$.

c) D'après b) la fonction F est dérivable sur $[a;+\infty[$ pour tout $a>0$. Cela implique que le fonction F est dérivable sur $]0;+\infty[$.

d) D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale dont on vérifié les hypothèses à la question b),

$$F'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt=\int_0^{+\infty}\frac{-te^{-xt}}{1+t}dt$$

On calcule pour A strictement positif : $\int_0^A f(x,t)dt-\int_0^A\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt$.

$$\int_0^A f(x,t)dt-\int_0^A\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt=\int_0^A\left[\frac{e^{-xt}}{1+t}-\frac{-te^{-xt}}{1+t}\right]dt=\int_0^A\frac{(1+t)e^{-xt}}{1+t}dt=\int_0^A e^{-xt}dt=\left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^A=\frac{e^{-Ax}}{x}+\frac{1}{x}$$

$\lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{e^{-Ax}}{x}=0$ ($x>0$) donc $F(x)-F'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Exercice 3

Existence : ...

<u>Calcul :</u> $f*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy$

$f*g(x)=\int_0^1 g(x-y)dy$ par définition de f.

On effectue un changement de variable : $u=x-y$.

On a alors $du=-dy$ et $0\le y\le 1\Leftrightarrow x\ge u\ge x-1$.

Ainsi, $f*g(x)=\int_0^1 g(x-y)dy=\int_x^{x-1} g(u)(-du)=\int_{x-1}^{x} g(u)du$.

Si $x\leq 0$ alors sur $[x-1;x]$, $g(u)=0$ et donc $f*g(x)=0$.

Si $x-1\geq 0$, c'est-à-dire si $x\geq 1$ alors sur $[x-1;x]$, $g(u)=u$ et donc :

$$f*g(x)=\int_{x-1}^{x} udu=\left[\frac{u^2}{2}\right]_{x-1}^{x}=\frac{x^2}{2}-\frac{(x-1)^2}{2}=\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{2x}{2}-\frac{1}{2}=x-\frac{1}{2}.$$

Si $0\leq x\leq 1$ alors $x-1\leq 0$ donc par définition de g, $f*g(x)=\int_0^x g(u)du=\int_0^x udu$.

Donc $f*g(x)=\int_0^x udu=\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^x=\frac{x^2}{2}$

Ainsi, on a $f*g(x)=\begin{cases}0 & sur\ ]-\infty;0] \\ x^2/2 & sur\ ]0;1[\\ x-0,5 & sur\ [1;+\infty[\end{cases}$.