

FICHE TD 4 - Transformation de Fourier

La transformée de Fourier de la fonction f est

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x) dx$$

EXERCICE 1 - Sinus cardinal $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$.

- (1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction indicatrice $\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$.
- (2) Calculer la transformée de Fourier de la fonction triangle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (3) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^4(x) dx$.

EXERCICE 2 - Gaussiennes. Pour $(m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on considère la fonction $g_{m,\sigma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

(voir Exercice 3 de la fiche TD-3)

- (1) Calculer la transformée de Fourier de $g_{0,1}$.
- (2) En déduire la transformée de Fourier de $g_{m,\sigma}$.

EXERCICE 3 - Pour $\alpha > 0$, on pose $f(x) = e^{-\alpha|x|}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de f .
2. A l'aide de la formule d'inversion, en déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
3. Calculer $f \star f$; calculer ainsi la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$.
4. Déterminer la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

EXERCICE 4 - (Théorème de Plancherel)

On pose $f(x) = e^{-x}H(x)$ où H est la fonction de Heavyside.

1. Calculer la transformée de Fourier \hat{f} de f .
2. Est-ce que \hat{f} est absolument intégrable? Vérifier que \hat{f} est de carré intégrable.
3. A l'aide de la formule de Plancherel calculez $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+p^2} dp$