Corrigé Contôle Final 2018

Exercice 1 [3 pts.] L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$, est-t-elle convergente ? (justifier soigneusement la réponse)

Corrigé Le fonction $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$ est continue en 0 car $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. f est clairement continu en tout autre point. L'intégral est donc convergente si elle est convergente en $+\infty$ et en $-\infty$. Comme f est pair il suffit de verifier la convergence de l'intégrale en $+\infty$.

Pour $x \geq 1$ on a $|\frac{\sin^2(x)}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$ et, d'après le critère de Riemann ($\alpha = 2 > 1$), $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est convergente. Donc $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$, est convergente.

Donc $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$, est convergente.

Exercice 2 [6 pts.] En utilisant la transformée de Laplace, résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^+$

$$f''(t) + 6f'(t) + 9f(t) = e^{-2t}$$

avec conditions initiales $f(0) = 2, f'(0) = -4$.

Corrigé Soit $Y(s) = \mathcal{L}[f](s)$ la transformée de Laplace de la solution. On a

$$\mathcal{L}[f'](s) = sY(s) - f(0) = sY(s) - 2.$$

$$\mathcal{L}[f''](s) = s^2Y(s) - sf(0) - f'(0) = s^2Y(s) - 2s + 4.$$

$$\mathcal{L}[e^{-2t}](s) = \frac{1}{s+2}$$

Donc l'equation différentielle s'écrit

$$s^2Y(s) - 2s + 4 + 6(sY(s) - 2) + 9Y(s) = \frac{1}{s+2}.$$

Le membre de gauche est $Y(s)(s^2 + 6s + 9) - 2s - 8$. Donc la solution est

$$Y(s) = \frac{1 + (2s+8)(s+2)}{(s+3)^2(s+2)}.$$

Decomposition en éléments simples :

$$Y(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{(s+3)^2}$$

donne

$$A = \lim_{s\to -2} (s+2)Y(s) = 1$$

$$C = \lim_{s\to -3} (s+3)^2Y(s) = 1$$

$$B = \lim_{s\to -3} \frac{d}{ds}(s+3)^2Y(s) = 1$$

Donc

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+2}](t) + \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+3}](t) + \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s+3)^2}](t) = e^{-2t} + e^{-3t} + te^{-3t}$$

Exercice 3 [3 pts.] Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \sin(x)e^{-x}H(x)$$

où $H(x)$ est la fonction de Heavyside.

Corrigé La fonction f est continue sur $[0, +\infty)$ et nulle sur $(-\infty, 0)$. De plus, on a

$$\forall x \in [0, +\infty)\,, \quad 0 \leq |f(x)| = |\sin(x)e^{-x}| \leq e^{-x}\,,$$

et la fonction $x \mapsto \exp(-x)$ est intégrable sur $[0, +\infty)$. D'où f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et donc, d'après le cours, sa transformée de Fourier est bien définie et continue. On peut faire le calcul suivant pour $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x)dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} e^{-ipx} \sin(x)e^{-x}dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} e^{-ipx} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} e^{-x}dx \\
&= \frac{1}{2i}\left(\int_{0}^{+\infty} e^{-ipx+ix-x}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-ipx-ix-x}dx\right)\,, \quad (Re(-ipx \pm ix - x) < 0) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\left[-\frac{e^{-ipx+ix-x}}{i(p-1)+1}\right]_0^{+\infty} - \left[-\frac{e^{-ipx-ix-x}}{i(p+1)+1}\right]_0^{+\infty}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i(p-1)+1} - \frac{1}{i(p+1)+1}\right) = \frac{1}{2-p^2+2ip} = \frac{2-p^2-2ip}{4+p^4}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 4 [3 pts.]Déterminer la limite (au sens des distributions) $\lim_{n\to\infty} T_{f_n}$ où

$$f_n(x) := \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}.$$

Corrigé Soit φ une fonction test,

$$\lim_{n\to\infty} T_{f_n}[\varphi] = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}} \varphi(x)dx.$$

On peut justifier l'échange de la limite avec l'intgéral avec le théorème de la convergence dominante : $|\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}| \leq 1$ donc $g(x) = |\varphi(x)|$ est une fonction qui est intgrable (car φ est une fonction continue qui s'annulle en dehors d'une intervalle compact) et tel que $g(x) \geq |\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}\varphi(x)|$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}} \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}} \varphi(x)dx.$$

Or,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}} = \left\{ \begin{array}{rl} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}} \varphi(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)dx - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (2H(x) - 1)\varphi(x)dx.$$

Donc $\lim_{n\to\infty} T_{f_n} = \lim_{n\to\infty} T_{2H-1}$ où H est la fonction de Heavyside.

Exercice 5 [8 pts.] Soit $\gamma : [0,2] \to \mathbb{C}$ le chemin donné par

$$\gamma(t) = \begin{cases} 2 - 2e^{2\pi i t} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 2e^{-2\pi i t} - 2 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

1. Tracer le chemin γ dans $\mathbb{C}$. Indiquez bien le sens dans lequel il est parcouru. S'agit-il d'un lacet ?
2. Donner trois nombres complexes z_1, z_2, z_3 tel que les indices $\text{ind}_\gamma(z_1), \text{ind}_\gamma(z_2), \text{ind}_\gamma(z_3)$ sont tous differents.

Soit

$$f(z) = \frac{32}{(z-1)^2(z+3)} + \frac{\cos(\pi z)}{(z+3)}$$

1. Déterminer les pôles avec leur ordre de f.
2. Déterminer le résidu en chaque pôle de f.
3. En utilisant le théorème des résidus calculer $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$.

Corrigé

1. C'est un lacet, car $\gamma(2) = \gamma(0)$. Le dessin a l'air comme un 8 couché fait de deux cercles de rayon 2, un de centre $+2$, l'autre de centre -2. Celui de centre $+2$ est parcouru dans le sens direct, celui de centre -2 dans le sens indirect.
2. $\text{ind}_\gamma(i) = 0$, car i est en dehors du lacet.
   $\text{ind}_\gamma(2) = 1$, car 2 est entouré une fois par le lacet dans le sens direct.
   $\text{ind}_\gamma(-2) = -1$, car -2 est entouré une fois par le lacet dans le sens indirect.
3. f est clairement continue pour $z \neq 1, -3$. On calcule : $\lim_{z\to -3} f(z)$ n'existe pas et

   $$\lim_{z\to -3}(z+3)f(z) = \frac{32}{(-3-1)^2} + \frac{\cos(\pi - 3)}{1} = 2 - 1 = 1$$

   Donc -3 est pôle d'ordre 1.
   $\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)$ n'existe pas et

   $$\lim_{z\to 1}(z-1)^2 f(z) = \frac{32}{(1+3)} + 0\frac{\cos(\pi 1)}{1+3} = 8$$

   Donc 1 est pôle d'ordre 2.
4. Le pôle en -3 étant d'ordre 1 on a

   $$\text{res}(f,-3) = \lim_{z\to -3}(z+3)f(z) = 1$$

   Le pôle en 1 étant d'ordre 2 on a

   $$\text{res}(f,1) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}(z-1)^2 f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\frac{32}{z+3} = -\frac{32}{4^2} = -2.$$

5. $$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i(\text{res}(f,1)\text{ind}_\gamma(1) + \text{res}(f,-3)\text{ind}_\gamma(-3)) = 2\pi i(-2 + (-1)) = -6\pi i$$

   car $\text{ind}_\gamma(1) = 1$ est $\text{ind}_\gamma(-3) = -1$.