Math II Analyse - Automne 2009 - Fonctions élémentaires 1

Les exercices notés avec une * ne seront pas forcément traités par l'enseignant. Celui-ci pourra néanmoins répondre à vos questions dessus.

Exercice 1. *Soient b un réel positif et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels, décroissante vers 0.*

1. *Montrer que la suite de réels $(b^{\frac{1}{n}})_n$ converge vers une limite finie, à déterminer.*
2. *Étudier, de même, la suite $(b^{a_n})_n$.*

Exercice (*) 2. *Discuter, en fonction de la valeur du réel α, de l'existence et de la valeur de la limite de la suite α^n, lorsque n tend vers $+\infty$.*

Exercice 3. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous souhaitons étudier la convergence de la suite de rationnel $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour tout entier n non nul par*

$$u_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Introduisons pour cela la suite auxiliaire $(v_n)_n$ donnée par $v_n := \ln(u_n)$

1. *En notant $x_n := \dfrac{x}{n}$, montrer que l'on a*
$$v_n = x\frac{\ln(1 + x_n)}{x_n}.$$
2. *Calculer*
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t}$$
Indication *: vous pourrez l'écrire comme un taux de variation.*
3. *Étudier la convergence, et éventuellement la limite, des suites $(v_n)_n$ et $(u_n)_n$.*

Exercice 4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée.*

1. *Rappeler la définition de la continuité de f au point $x \in \mathbb{R}$.*
2. *En prenant $f(x) = \sin(x)$, étudier la continuité de cette fonction en 0, puis en un point quelconque.*

Exercice 5. *On note f la fonction numérique définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = (1-x)\ln(1-x)+x$, et g la fonction définie sur $]0, 1[$ par $g(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$.*

1. *Etudier les variations de f sur $[0, 1[$, et en déduire que g est positive.*
2. *Etudier les variations de g sur $]0, 1[$.*
3. *Déterminer les limites éventuelles de g en 0 et 1.*

Exercice 6. *Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{1/x}$.*

1. *Déterminer les limites éventuelles à gauche et à droite de f en 0. Cette fonction est-elle prolongeable en une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$?*
2. *Pour x dans $\mathbb{R}^*$, calculer $f'(x)$ puis déterminer la limite à gauche éventuelle de f' en 0.*
3. *Dresser le tableau de variation de f, et en tracer sommairement le graphe.*

Exercice 7. *Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$.*

1. *Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$. Dresser le tableau de variation de cette fonction, et en déduire qu'il existe un et un seul réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$. Déterminer x_0.*
2. *En déduire les variations de f.*
3. *Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.*
4. *Déterminer l'asymptote au graphe de f.*
5. *Tracer ce graphe et son asymptote, en faisant figurer les tangentes remarquables.*

Exercice (*) 8. *Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$.*

1. *Déterminer les limites éventuelles de f en $-\infty$ et $+\infty$.*
2. *Etudier les variations de f.*
3. *Tracer sommairement la courbe représentative de f.*

Exercice 9. *Résoudre l'équation $x^{\ln(x-1)} = e^6$, d'inconnue réelle x.*

Exercice 10. *Résoudre l'équation $\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$, d'inconnue réelle x.*

Exercice (*) 11. *Résoudre l'équation $x^{\left(x^{\sqrt{x}}\right)} = (x^x)^{\sqrt{x}}$, d'inconnue réelle x.*

Exercice 12. *Montrer que, pour tous x et y réels distincts, on a*

$$exp\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{e^x + e^y}{2}$$