Math II Analyse - Automne 2009 - Fonctions élémentaires 2

Les exercices notés avec une * ne seront pas forcément traités par l'enseignant. Vous êtes par contre encouragés à les préparer chez vous, et à poser des questions dessus.

Exercice 1. *Soit θ un réel. En utilisant l'exponentielle complexe, retrouver les formules permettant de calculer* $\cos(3\theta)$ *en fonction de* $\cos(\theta)$*, ainsi que* $\sin(3\theta)$ *en fonction de* $\sin(\theta)$*.*

Exercice 2. *Soit θ un réel. Linéariser les expressions suivantes :*

$$\begin{gathered}\sin^3(\theta);\\ \cos^5(\theta);\\ (*)\cos^4(\theta)\sin^2(\theta).\end{gathered}$$

Exercice 3. *Soient θ un réel et $n \geq 1$ un entier.*

1. *Calculer les expressions suivantes :*

$$\begin{aligned}A_n &= 1 + \binom{n}{1}\cos(\theta) + \binom{n}{2}\cos(2\theta) + ... + \binom{n}{n}\cos(n\theta);\\ B_n &= \binom{n}{1}\sin(\theta) + \binom{n}{2}\sin(2\theta) + ... + \binom{n}{n}\sin(n\theta).\end{aligned}$$

2. *Calculer maintenant :*

$$\begin{aligned}C_n &= \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta);\\ D_n &= \sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta).\end{aligned}$$

Exercice 4. *Etablir la formule suivante*

$$\tan(x-y)+\tan(y-z)+\tan(z-x)=\tan(x-y)\tan(y-z)\tan(z-x),$$

où x, y et z sont des réels tels que les trois tangentes apparaissant dans le formule soient bien définies.

Exercice 5. *Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x :*

1. $2\sin(2x) = 1$ *;*
2. $2^{\sin^2(x)} = \cos(x)$ *;*
3. $\sin(x) = \cos(x)$ *;*
4. $\sin(\cos(x)) = \cos(\sin(x))$ *;*

Exercice (*) 6. *Soient a un réel et et f_a la fonction réelle définie par $f_a(\theta) := \sin^2(\theta) + a\cos(\theta)$. Déterminer en fonction de a le plus grand intervalle de la forme $[0, C_a]$ où une restriction de la fonction f_a est bijective (sur un intervalle que l'on précisera).*

Exercice 7. *Etant donnés deux réels u et v, établir les formules suivantes :*

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}^2(u)+\mathrm{sh}^2(v) &= \mathrm{sh}^2(u)+\mathrm{ch}^2(v) = \mathrm{ch}(u+v)\,\mathrm{ch}(u-v)\\ \mathrm{ch}^2(u)-\mathrm{ch}^2(v) &= \mathrm{sh}^2(u)-\mathrm{sh}^2(v) = \mathrm{sh}(u+v)\,\mathrm{sh}(u-v)\end{aligned}$$

Exercice 8. *Soit u un réel. Exprimer $\operatorname{ch}^5(u)$ et $\operatorname{sh}^4(u)$ en fonction de e^u et de ses puissances.*

Exercice 9. *Soit f la fonction réelle définie par $f(u) = \dfrac{4 - 5\operatorname{ch}(u)}{\operatorname{sh}(u)}$.*

1. *Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. A-t-elle une parité ?*
2. *Déterminer les limites éventuelles de f en 0^+ et $+\infty$.*
3. *Etudier les variations de f, en essayant de donner une formulation simple des points où cette fonction s'annule.*
4. *Dresser le tableau de variations de f et tracer sommairement son graphe.*

Exercice 10. *Résoudre l'équation différentielle suivante, d'inconnue y, fonction dérivable réelle d'une variable réelle t :*

$$y' \operatorname{ch}(t) + y \operatorname{sh}(t) = 0$$

Exercice (*) 11. *Résoudre l'équation différentielle suivante, d'inconnue y, fonction deux fois dérivable réelle d'une variable réelle t :*

$$y'' - y = 4\operatorname{ch}(t)$$