Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE MATH4
Année 2015-2016
Printemps 2016 3 mai 2016

Corrigé CC3

Exercice 1 Transformation de Laplace. *Rappel :* $\mathcal{L}(e^{at}t^n)(s) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $a \in \mathbb{C}$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante : $Y(s) = \dfrac{2s+1}{(s-2)(s^2+1)}$.
2. En utilisant la transformée de Laplace, résoudre alors l'équation différentielle :

$$y''(x) - \frac{5}{2}y'(x) + y(x) = -\frac{5}{2}\sin(x), \text{ avec les conditions : } y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

1. Decomposition sur $\mathbb{C}$: $Y(s) = \dfrac{2s+1}{(s-2)(s-i)(s+i)} = \dfrac{A}{s-2} + \dfrac{B}{s-i} + \dfrac{C}{s+i}$

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s\to 2}(s-2)Y(s) = \frac{5}{5} = 1 \\ B &= \lim_{s\to i}(s-i)Y(s) = \frac{2i+1}{(i-2)2i} = -\frac{1}{2} \\ C &= \lim_{s\to -i}(s+i)Y(s) = \frac{-2i+1}{(-i-2)(-2i)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $Y(s) = \dfrac{1}{s-2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-i} + \dfrac{1}{s+i}\right) = \dfrac{1}{s-2} - \dfrac{s}{s^2+1}$.

2. On pose $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y')(s) &= sY(s) - y(0) = sY(s) \\ \mathcal{L}(y'')(s) &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 2 \\ \mathcal{L}(\sin)(s) &= \frac{1}{s^2+1} \end{aligned}$$

Donc $Y(s)$ satisfait $s^2Y(s) - 2 - \frac{5}{2}sY(s) + Y(s) = -\frac{5}{2}\frac{1}{s^2+1}$ ce qui donne

$$Y(s) = \frac{2 - \frac{5}{2}\frac{1}{s^2+1}}{s^2 - \frac{5}{2}s + 1} = \frac{2s+1}{(s^2+1)(s-2)}.$$

La réponse à la première question nous permet d'invertir la transformé de Laplace :

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s-2})(x) - \mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+1})(x) = e^{2x} - \cos(x)$$

Exercice 2 Calculer les limites suivantes au sens des distributions.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} T_{f_n}$ où $f_n(x) = \dfrac{n}{2}e^{-n|x|}$
2. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\delta_h - \delta_{-h}}{2h}$

Une suite de distributions T_n converge vers T au sens de distributions si pour toute fonction test φ on a $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(\varphi) = T(\varphi)$.

1. Soit on raisonne avec un résultat du cours ainsi : Avec $\rho(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ on a $f_n = \rho_{\frac{1}{n}}$ où $\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\rho(\frac{x}{\epsilon})$. Comme ρ est une fonction continue positive et $\int \rho(x)dx = 1$ on a (résultat du cours) $\lim_{\epsilon\to 0}\int \rho_\epsilon(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$ pour toute fonction test. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} T_{f_n} = \delta_0$, la distribution de Dirac en 0.
Soit on calcule directement : Soit φ une fonction test, on effectue le changement de variable $u = nx$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{2}e^{-|nx|}\varphi(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\infty} e^{-u}\varphi\left(\frac{u}{n}\right)du + \int_{-\infty}^{0} e^{u}\varphi\left(\frac{u}{n}\right)du\right).$$

On montre ensuite que φ est bornée :

(1) φ est une fonction test donc $\exists A, B \in \mathbb{R}, A < B, \forall x \in]-\infty, A] \cup [B, \infty[, f(x) = 0$.
(2) φ est continue sur $[A, B]$, elle est donc bornée. Donc $\exists M > 0, \forall x \in [A, B], |f(x)| \leq M$.

$$(1) + (2) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M.$$

Donc, $\forall u \in [0, \infty[, \left| e^{-u}\varphi\left(\frac{u}{n}\right)\right| \leq Me^{-u}$ (qui est une fonction intégrable sur $[0, \infty[$).
Le théorème de convergence dominée permet de conclure que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-u}\varphi\left(\frac{u}{n}\right) du = \varphi(0)$. On montre de la même manière que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{0} e^{u}\varphi\left(\frac{u}{n}\right) du = \varphi(0)$.
Donc $\lim\limits_{n\to\infty} T_{f_n} = \delta_0$.

2.
$$\frac{\delta_h - \delta_{-h}}{2h}(\varphi) = \frac{\delta_h(\varphi) - \delta_{-h}(\varphi)}{2h} = \frac{\varphi(h) - \varphi(-h)}{2h}$$

et $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(-h)}{2h} = \varphi'(0)$. Donc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\delta_h - \delta_{-h}}{2h} = -\delta_0'$.

Exercice 3 Dérivation des distributions.

1. Calculer la dérivée au sens de distribution de T_g où $g(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 - x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
2. Soit $f(x) = \sin(x) - x$ et φ une fonction test. Calculer $T(\varphi)$ pour $T = f\delta_0$ et $T = f\delta_0'$.

1. g est une fonction de classe C^1 par morceaux avec un saut en $x = 0$. On a $\Delta_g(0) = \lim_{x\to 0^+} g(x) - \lim_{x\to 0^-} g(x) = 2$. De plus $g'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 0 \\ -2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ ce qu'on peut écrire $g'(x) = 2|x|$ (on pose $g'(x) = 0$). D'où
$$T_g' = T_{2|x|} + 2\delta_0.$$
2. f est une fonction de classe C^∞ qui satisfait $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. On a $f\delta_0(\varphi) = \delta_0(f\varphi) = f(0)\varphi(0) = f(0)\delta_0(\varphi)$. Donc $f\delta_0 = f(0)\delta_0 = 0$.
D'après la règle de Leibnitz, $(f\delta_0)' = f'\delta_0 + f\delta_0'$. Comme $f\delta = 0$ ceci donne $f\delta_0' = -f'\delta_0 = -f'(0)\delta_0 = 0$.