

Contact : Boris Adamczewski (la thèse pourrait commencer en cotutelle avec Laurent Habsieger).

Mel : Boris.Adamczewski@math.univ-lyon1.fr

Page personnelle : <http://math.univ-lyon1.fr/~adamczew/>

Lieu de la thèse : Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1

Titre : Transcendance en caractéristique positive et automates finis.

Sujet : La suite des chiffres représentant un nombre algébrique irrationnel comme $\sqrt{2}$ dans une base entière est source de nombreux problèmes pour la plupart totalement ouverts. De façon assez miraculeuse, lorsque l'on choisit d'additionner et de multiplier sans retenue, il devient possible de décrire les représentations des nombres algébriques : c'est le théorème de Christol. Ici, l'expression "additionner et multiplier sans retenue" doit s'entendre comme suit : au lieu d'étudier l'algébricité sur le corps \mathbb{Q} du nombre réel $\sum_{n \geq 0} a_n/p^n$, on

s'intéresse à l'algébricité de la série formelle $f(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in \mathbb{F}_p((X))$ sur

le corps des fonction rationnelles $\mathbb{F}_p(X)$, p désignant un nombre premier. Le théorème de Christol s'énonce alors de la façon suivante : la série formelle f est algébrique sur $\mathbb{F}_p(X)$ si et seulement si la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ peut être engendrée par un p -automate fini. Un des intérêts de ce résultat est de lier des objets apparemment sans rapport que sont d'une part les automates finis, machines de Turing particulièrement basiques, et d'autre part les séries formelles à coefficients dans un corps fini. Un autre aspect important du théorème de Christol est qu'il fournit une approche pour prouver la transcendance de certains analogues de nombres classiques (comme π , certaines valeurs de la fonction ζ ou d'autres périodes).

Malheureusement, le corps $\mathbb{F}_p((X))$ est plutôt petit. Il est loin d'être algébriquement clos et certains analogues de nombres réels classiques ne peuvent être représentés comme une série formelle classique. Tout récemment, Kedlaya a contourné ce problème en se plaçant dans un corps beaucoup plus grand, celui des séries de Hahn qui sont indexées par des sous-ensembles bien ordonnés de \mathbb{Q} . En particulier, Kedlaya a étendu le théorème de Christol à ces "séries formelles généralisées" en donnant une description, toujours en termes d'automates finis, de la clôture algébrique du corps $\mathbb{F}_p(X)$. Le but de la thèse serait d'utiliser le théorème de Kedlaya pour démontrer la transcendance et éventuellement l'indépendance algébrique de certaines séries de Hahn.