**Nom et numéro de l'école doctorale :** ED MathIF, numéro 336
**Nom et label de l'unité de recherche :** Institut Camille Jordan, UMR 5208
**Localisation :** Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon-1
**Nom du directeur de thèse :** Tuna Altınel **Co-directeur éventuel :** Alexey Muranov
**Courriel :** altinel@math.univ-lyon1.fr
**Titre de la thèse :** Théorie des modèles des groupes de Thompson-Higman-Bieri-Strebel-Stein

**Connaissances et compétences requises :**

Connaissances générales au niveau M1 ; des connaissances plus solides en théorie générale des groupes sont préférables ; connaissances des bases de la théorie des modèles. Des connaissances particulières sur les classes des groupes en question sont utiles mais pas nécessaires. Tout candidat intéressé peut immédiatement entamer l'étude de l'article [4].

**Les enjeux de la thèse :**

Ce projet de thèse se situe à la frontière de la théorie des groupes et de la théorie des modèles. Il propose l'étude de certaines classes de groupes omniprésents en mathématiques en utilisant les outils de la théorie des modèles qui est la branche de la logique mathématique la plus fortement liée aux autres disciplines des mathématiques grâce à sa thématique et à sa méthodologie. Le projet est concerné par une thématique et une approche nouvelles. Au fait, il offre trois directions dont chacune a le potentiel d'être un projet de thèse indépendant. Ils sont présentés ensemble pour offrir aux candidats éventuels la liberté de choix suivant leurs préferences et leurs formations.

Motivé par un travail récent ([1]), nous proposons, sous trois rubriques différentes, l'étude des *propriétés définissables* des groupes de Thompson et de leurs généralisations par Higman, Bieri-Strebel et Stein. Une thèse effectuée dans l'une de ces directions fournira à l'étudiant les compétences et connaissances en plusieurs domaines dont la théorie des modèles et la théorie des groupes infinis. L'omniprésence de ces groupes en mathématiques offrira un horizon très large d'ouvertures mathématiques au candidat.

**Description détaillée du projet :**

Dans les années soixante, Richard Thompson a introduit un groupe infini de présentation finie, noté fréquemment $F$. Ce groupe, retrouvé plus tard dans des contextes très variés, peut être représenté sous diverses formes, en tant que groupe de permutations du cercle unité, groupe d'automorphismes de certaines structures provenant de l'algèbre unvierselle ou de la théorie des modèles, etc. Quels que soient le contexte ou la représentation, le groupe $F$ est accompagné de deux autres groupes infinis de présentation finie eux aussi introduits par Thompson, notés fréquemment $T$ et $V$ : en fait, $F \leq T \leq V$. Les groupes $T$ et $V$ sont simples : ils n'ont pas de sous-groupe propre, nontrivial et distingué). Ils sont les premiers exemples de groupes simples infinis de présentation finie qui reste toujours une famille très restreinte ([4]). Quant à $F$, c'est son groupe dérivé $F'$ qui est simple, et $F/F' \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Après Thompson, Graham Higman a utilisé certaines algèbres de fonction pour construire une classe de groupes qui inclut $V$ ([5]). Les membres de cette classe sont tous infinis de présentation finie. Suivant la parité de l'un des deux paramètres utilisés pour les décrire, soit ils sont simples soit leurs sous-groupes dérivés, d'indice 2 dans le groupe ambient, sont simples. La notation utilisée par Higman pour les membres de cette classe était $G_{n,r}$ et $V = G_{2,1}$. Kenneth Brown a montré dans [3] que $F$ et $T$ ont leurs anologues naturels dans cette classe.

Bieri-Strebel et plus tard Melanie Stein ont développé un contexte géométrique très général pour l'étude des groupes de Thompson-Higman. L'article [9] contient une bonne exposition et des résultats importants sur cette famille. Dans ce qui suit, nous utiliserons l'abbréviation THBSS quand il s'agit de la famille générale. Quand il s'agira d'une sous-famille, nous donnerons le nom du mathématicien qui l'a introduite.

Ce projet de thèse propose une étude des groupes de Thompson et Higman qui éventuellement s'étendrait à la classe THBSS. Dans un travail récent, en collaboration avec Alexey Muranov ([1]), nous avons montré que les groupes de THBSS interprètent l'Arithmétique de Peano. Ceci généralise le même résultat obtenu par Valery Bardakov et Vladimir Tolstykh ([2]) pour le groupe $F$ de Thompson. Une conséquence est l'indécidabilité des théories élémentaires des groupes concernés. Cette réponse à une question de Mark Sapir motive plusieurs directions de recherche.

**Direction I :** L'interprétabilité de l'arithmétique dans une structure a de fortes conséquences sur la théorie élémentaire de celle-ci. Pourtant, en théorie des modèles, la propriété recherchée dans des conditions similaires est la bi-interprétabilité des deux structures. Cette notion est plus forte que l'existence des in-

terprétations dans deux directions. La bi-interprétabilité de deux structures $A$ et $B$ nécessite que l'isomorphisme entre $A$ et sa copie $\tilde{A}$ obtenue à partir de $B$ soit *interprétable* dans $A$ ([6]). Un travail récent de Anatole Khélif ([7]) montre que la bi-interprétabilité avec l'arithmétique d'une structure de type finie munie d'une signature finie implique cette structure soit *quasi-finiment axiomatisable*, en d'autres termes, qu'il existe un énoncé du premier ordre dans la signature fixée tel que toute structure de même signature et de type fini dans lequel cet énoncé est vrai soit isomorphe à celle en question. C'est une question ouverte s'il existe des groupes simples quasi-finiment axiomatisables ([8]). Une réponse, ne serait-ce que partielle, à la bi-interprétabilité dans le cadre des groupes $F$, $T$ et $V$, sera une avancée importante dans la compréhension structurelle de ces groupes, et ouvrira la voie à des généralisations vers la classe de Higman et, quitte à trouver de bonnes formulations, à tous les groupes de THBSS.
**Direction II :** L'interprétation de l'arithmétique dans les groupes de THBSS se fait en utilisant les centralisateurs de certains sous-ensembles qui fournissent des sous-groupes définissables. Ceci et des considérations générales de la théorie des modèles motivent l'étude systématique de la structure définissable de ces groupes. Les résultats connus dans cette direction dont la définissabilité du groupe de commutateurs de $F$ et de ses généralisations sont loin d'être systématiques. Pourtant, ils soulignent un aspect important de cette direction : quoique motivée par des problèmes de la théorie des modèles cette direction de recherche aura des fruits en toutes les branches des mathématiques, à commencer avec la théorie des groupes, qui interviennent régulièrement dans l'étude des groupes de THBSS. En effet, une comparaison avec les travaux dans les dix dernières années sur la théorie élémentaire du groupe libre, malgré les différences énormes entre les deux contextes, est révélatrice. La recherche des solutions aux mêmes questions de la théorie des modèles a enrichi la recherche sur le groupe libre.

Cette direction éventuellement permettra une meilleure compréhension des plongements "naturels" connus entre les membres des groupes THBSS. La connaissance de la structure définissable des groupes en question permettra de décider quels plongements connus sont élémentaires. Cette connaissance ouvre la voie à une meilleure compréhension des théories élémentaires des groupes de THBSS et aussi à la troisième direction proposée dans ce projet.
**Direction III :** En théorie des modèles, la compréhension d'une théorie élémentaire aboutit naturellement à l'étude de ses *modèles saturés*. La troisième direction de recherche propose l'étude des extensions saturées des groupes de THBSS en s'articulant à la deuxième. Il est probable que l'objectif principal ne soit pas atteint à la fin de la thèse. Les groupes saturés infinis étant de type infini, de nouvelles méthodes d'étude seront nécessaires. Néanmoins, même des résultats partiels auront une grande valeur. D'un côté ils contribueront à des avancées dans la direction II tout en s'alimentant de cette direction, d'un autre côté ils vont contribuer aux connaissances sur la structure des groupes de THBSS en les liant à des groupes plus larges qui les contiennent comme des sous-structures. Le candidat aura reçu une formation en plusieurs domaines ouvrant un large éventail de possibilités de recherche suite à la complétion de sa thèse.

# Références


[1] T. Altınel and A. Muranov. Interprétation de l'arithmétique dans certains groupes de permutations affines par morceaux d'un intervalle. http ://math.univ-lyon1.fr/ muranov/publications.html.

[2] V. G. Bardakov and V. A. Tolstykh. Interpreting the arithmetic in Thompson's group $f$. Preprint : arXiv :math/0701748.

[3] K. S. Brown. Finiteness properties of groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 44(1-3) :45–75, 1987.

[4] J. W. Cannon, W. J. Floyd, and W. R. Parry. Introductory notes on Richard Thompson's groups. *Enseign. Math.*, 42(3-4) :215–256, 1996.

[5] G. Higman. *Finitely presented infinite simple groups*, volume 8 of *Notes on Pure Mathematics*. Australian National University, Canberra, 1974.

[6] W. Hodges. *Model Theory*. Number 42 in Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1993.

[7] A. Khélif. Bi-interprétabilité et structures QFA : étude de groupes résolubles et des anneaux commutatifs. preprint, 2007.

[8] A. Nies. Describing groups. *Bull. Symbolic Logic*, 13 :305–339, 2007.

[9] M. Stein. Groups of piecewise linear homeomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 332(2) :477–514, 1992.