Proposition de sujet de thèse en théorie des graphes

Professeur A. Bondy
mail : jabondy@univ-lyon1.fr

8 juin 2007

1 La conjecture de Caccetta et Häggkvist

Définition 1 *Un graphe orienté simple G est la donnée d'un ensemble $V = V(G)$ de sommets et d'un ensemble $E = E(G) \subseteq V \times V$ d'arêtes. Tous les graphes G mentionnés ici seront supposés orientés, simples, et, dans la première partie (resp. dans la seconde partie), sans cycle de longueur inférieure ou égale à 2 (resp. sans boucle). En outre on ne considère que des cycles, chemins, également orientés. On notera parfois $G = (V, E)$ pour signifier que G est le graphe dont l'ensemble des sommets est V et dont l'ensemble des arêtes est E.*

Définition 2 *Soit $G = (V, E)$ un graphe. Pour $v \in V$, on note :*

$$\begin{aligned} N_G^+(v) &= \{w \in V \mid (v,w) \in E\} \text{ le voisinage sortant premier de } v \text{ dans } G, \\ d_G^+(v) &= |N_G^+(v)| \text{ le degré sortant de } v \text{ dans } G, \\ \delta_G^+ &= \min\left\{d_G^+(v), v \in V\right\} \text{ le degré sortant minimum du graphe } G. \end{aligned}$$

On définit de la même manière le voisinage entrant premier, le degré entrant d'un sommet v de G, et le degré entrant minimum de G. Soit d un entier naturel. On dit qu'un graphe G est d-régulier si $d_G^+(v) = d_G^-(v) = d$ pour tout $v \in V(G)$. Enfin, on appelle voisinage sortant second de v l'ensemble des sommets w de G que l'on peut atteindre depuis v par un chemin de longueur 2 et par aucun chemin de longueur moindre :

$$N_2^+(v) = \bigcup_{w \in N_G^+(v)} N_G^+(w) \setminus N_G^+(v).$$

Définition 3 *Soit $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ deux graphes. Une application $\varphi : V \to V'$ est un isomorphisme de G sur G' si et seulement si elle est bijective et préserve à la fois l'incidence et la non-incidence, c'est-à-dire :*

$$(v, w) \in E \Leftrightarrow (\varphi(v), \varphi(w)) \in E'.$$

On appelle automorphisme de G tout isomorphisme de G dans lui-même et on note $\mathrm{Aut}(G)$ *l'ensemble des automorphismes de G. C'est un groupe pour la loi de composition, et il agit sur $V(G)$. On dit que G est transitif si* $\mathrm{Aut}(G)$ *agit transitivement sur $V(G)$.*

Behzad, Chartrand et Wall conjecturent, dans un article écrit en 1970 ([4]), que tout graphe G d-régulier dont le cycle de plus petite longueur est g et minimal pour ces conditions possède exactement $(g-1)d+1$ sommets.
Caccetta et Häggkvist, en [5], proposent une généralisation de cette conjecture :

Conjecture 1 *Soit G un graphe tel que $\delta_G^+ \geq d$, alors G possède un cycle (orienté) de longueur au plus $\lceil \frac{n}{d} \rceil$.*

La conjecture a été démontrée pour les cas $d = 1$ (trivial), $d = 2$ (Caccetta et Häggkvist [5]), $d = 3$ (Hamidoune [15]), $d = 4$ et $d = 5$ (Hoang et Reed) ainsi que pour $d \leq \sqrt{n/2}$ (Schen). Hamidoune, en [16], démontre la conjecture pour les graphes de Cayley, et plus généralement pour les graphes transitifs, en usant de techniques propres à la théorie additives des nombres, en particulier en faisant appel au théorème de Kemperman. Inversement, par exemple en appliquant les inégalités de Plünnecke à un graphe construit à partir de sous-ensembles A, B d'un groupe additif Γ, on obtient des résultats intéressants pour la théorie des nombres, ce qui illustre les nombeux liens entre ces deux domaines. Citons à titre d'exemple une généralisation du théorème d'Erdös-Heilbronn :

Théorème 2 *Soient A, $B \subseteq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est premier et $|A| \neq |B|$. Alors :*

$$|\{a+b,\ (a,b) \in A \times B,\ a \neq b\}| \geqslant \min(|A|+|B|-2, p).$$

Pour des valeurs arbitraires de d par contre, seuls des résultats faisant intervenir une constante additive c ont été établis :

Théorème 3 *(Shen) Si $\delta_G^+ \geqslant d$, alors il existe un cycle de longueur au plus $\frac{n}{d} + c$, où $c = 73$.*

Le cas $d = \frac{n}{3}$, encore non résolu, a pourtant reçu une attention particulière de la part de la communauté scientifique. Les chercheurs ont tenter de trouver la valeur de la constante c minimale telle que $\delta_G^+ \geq cn$ force l'existence d'un cycle de longueur 3. A. Bondy ([9]), en utilisant un argument de dénombrement de sous-graphes orientés sur quatre sommets inspiré de [11] plutôt que des techniques inductives, a montré que

$$c \leq \frac{2\sqrt{6}-3}{5} \simeq 0,3797...$$

J. Shen ([10]) a ensuite pu affiner ce résultat à $c \leq 3 - \sqrt{7} \simeq 0,3542...$
P. Seymour, M. de Graaf et A. Schrijver ([6]) ont cherché la valeur minimale β telle que, lorsque le degré sortant *et* le degré entrant de G sont au moins βn, G contient un cycle de longueur 3. Ils sont arrivés à établir $\beta \leq 0,3487...$ La conjecture suivante, dûe à Seymour, impliquerait $\beta = 1/3$:

Conjecture 4 *Tout graphe orienté G possède un sommet v pour lequel le second voisinage sortant est au moins aussi grand que le voisinage sortant premier, i.e. $|N_2^+(v)| \geqslant |N_G^+(v)|$.*

Seymour et Sullivan proposent une généralisation colorée de cette conjecture, généralisation qui à elle seule impliquerait à la fois les conjectures 1 et 4.

Définition 4 *Soit $G = (V, E)$ un graphe et k_G un entier naturel non nul tel que toute arête $e \in E$ se voit attribué un sous-ensemble S_e de $\{1, 2, ...k_G\}$. On dit qu'un sous-graphe H de G est une structure arc-en-ciel dans G si, et seulement si, il existe une fonction injective $l : E(H) \to \{1, 2, ..., k_G\}$ telle que $l(e) \in S_e$ pour tout $e \in E(H)$.*

Conjecture 5 *Soit G un graphe, et soient $E_1, E_2, ..., E_k \subseteq E(G)$. Soit $G_i = (V, E_i)$. Définissons les sous-ensembles S_e par :*

$$i \in S_e \Leftrightarrow e \in E_i.$$

Alors l'un des deux cas suivant se produit :
i. Il existe un cycle arc-en-ciel dans G.
ii. Il existe un sommet v de G tel que le nombre de sommets w de G pour lequels il existe un chemin arc-en-ciel de v vers w est supérieur à $\sum_{i=1}^{k} d^+_{G_i}(v)$.

Enfin on a la conjecture suivante, elle aussi impliquée par la conjecture 5 :

Conjecture 6 *Tout graphe G possède un sommet v tel que $|N_2^+(v)| + |N^+(v)| \geq 2|N^-(v)|$*

Mentionnons une dernière conjecture de Seymour :

Conjecture 7 *Soit G un graphe auquel il manque k arêtes pour être complet (si G a n sommets, il possède donc $\binom{n}{2} - k$ arêtes), et ne contenant pas de cycle de longueur inférieure à 3. Alors il existe un sous-ensemble $J \subset E$ de moins de $k/2$ arêtes tel que $G \setminus J$ n'a pas de cycle (orienté).*

2 Conjecture de Berge sur les partitions de graphes en chemins

Définition 5 *Soit G un graphe. On dit que $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, .., P_m\}$ est une partition en chemins de G si et seulement si les P_i sont des chemins (orientés) de G et que tout sommet de G appartient à exactement un des P_i. Soit k un entier positif non nul. On définit la k-norme de $\mathcal{P}$ par :*

$$|\mathcal{P}|_k = \sum_{i=1}^{m} \min(|P_i|, k).$$

On dit que $\mathcal{P}$ est k-optimal s'il minimise cette quantité.

Définition 6 *Soit G un graphe et k un entier positif non nul. On dit qu'un ensemble $I \subset V(G)$ est un stable, si et seulement si, il n'existe pas d'arêtes dans $E(G)$ reliant deux sommets dans I. Une famille $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, .., C_k\}$ de k stables deux à deux disjoints est appelée un k-coloriage, ses éléments sont appelés classes de couleurs.*

Définition 7 *On dit qu'un k-coloriage $\mathcal{C}$ et une partition en chemins $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, .., P_m\}$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathcal{C}$ rencontre chaque P_i en $\min(|P_i|, k)$ classes de couleurs différentes.*

Conjecture 8 *(Berge) Si $\mathcal{P}$ est k-optimal alors il existe un k-coloriage $\mathcal{C}$ orthogonal à $\mathcal{P}$.*

Pour $k = 1$, on retrouve le théorème de Gallai et Milgram, ainsi que le théorème bien connu de Dilworth pour les ensembles ordonnés :

Théorème 9 *(Gallai et Milgram [1], p.50) Pour tout graphe G et toute partition $\mathcal{P}$ de G en un minimum de chemins, il existe un stable $\{v_P,\ P \in \mathcal{P}\}$ tel que $v_P \in P$ pour tout $P \in \mathcal{P}$.*

Théorème 10 *(Dilworth [1], p.51) Dans tout ensemble fini ordonné P, le nombre minimum de chaînes (ensembles d'éléments deux-à-deux comparables) dont l'union recouvre entièrement P est égal à la cardinalité maximum d'une antichaîne (ensemble d'éléments deux à deux incomparables).*

La conjecture a été démontrée par Claude Berge ([17]) pour les graphes bipartis, pour les partitions en chemins ne contenant que des chemins de plus (resp. de moins) de k sommets, pour les graphes contenant un chemin Hamiltonien ainsi que pour les graphes acycliques, par des méthodes de programmation linéaire, entre autres.

References

[1] R. Diestel, *Graph Theory*, Third Edition.

[2] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph Theory, à paraître.*

[3] D. Osthus, D. Kühn, *Notes personelles de cours, Université de Birmingham.*

[4] M. Behzad, G. Chartrand, C. E. Wall, *On minimal digraphs with given girth, Fund. Math. 69 (1970), 227-231.*

[5] L. Caccetta, R. Haggkvist, *On minimal digraphs with given girth, Congr. Numer. 21 (1978), 181-187.*

[6] M. de Graaf, A. Schrijver and P. Seymour, *Directed triangles in directed graphs, Discrete Math. 110 (1992), 279-282.*

[7] Blair D. Sullivan, *A Summary of Results and Problems Related to the Caccatta-Häggkvist Conjecture.*

[8] H. J. Broersma, Xueliang Li, *Some approaches to a conjecture on short cycles in digraphs.*

[9] J. A. Bondy, *Counting subgraphs: a new approach to the Caccetta-Häggkvist conjecture, Discrete Math. 165/166 (1997), 71-80.*

[10] Jian Shen, *Directed Triangles in Digraphs, Journal of Combinatorial Theory, Series B 74, (1998), 405-407*

[11] A. W. Goodman, *On sets of acquaintances and strangers at any party, Amer. Math. Monthly 66 (1959), 778-783.*

[12] M. Behzad, G. Chartrand, Curtiss E. Wall, *On minimal regular digraphs with given girth, Fund. Math. LXIX (1970).*

[13] M. de Graaf, A. Schrijver, P. D. Seymour, *Directed triangles in directed graphs, Discrete Math. 110 (1992), 279-282.*

[14] J. A. Bondy, *An upper bound on the number of 2-paths in a digraph.*

[15] Y. O. Hamidoune, *A note on minimal directed graphs with gven girth, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 43 (1987), 343-348.*

[16] Y. O. Hamidoune, *An application of connectivity theory in graphs to factorizations of elements in groups, European J. Combin. 2 (1981), no.4, 349-355.*

[17] C. Berge, *k-optimal partitions of a directed graph, Europ. J. Combinatorics (1982) 3, 97-101.*

[18] C. Berge, *A property of the k-optimal partitions, Progress in Grath Theory (J. A. Bondy and U. S. R. Murty eds), Academic Press, Toronto, (1984),105-108*

[19] N. Linial, *Extending the Greene-Kleitman theorem to directed graphs, Journal of Combinatorial Theory, Series A 30, (1981), 331-334*

[20] E. Berger et I. B. A. Hartman, *Proof of Berge's Strong Path Partition Conjecture for k=2.*

[21] J. A. Bondy, *Disconnected orientations and a conjecture of Las Vergnas, J. London Math. Soc. (2), 14 (1978), 277-282*

[22] J. A. Bondy, *A short proof of the Chen-Manalastas theorem, Discrete Math. 146, (1995), 289-292.*