ANALYSE MATHÉMATIQUE D'UN SYSTÈME DE SAINT-VENANT

FRANCIS FILBET ET PASCAL NOBLE

1. Le système de Saint-Venant

Les équations de Saint Venant modélisent l'écoulement d'une couche fluide de faible profondeur sous l'action de la gravité. Sous certaines hypothèses, le système de Saint-Venant s'obtient à partir des équations de Navier Stokes à surface libre pour un fluide Newtonien incompressible dans la limite $\epsilon \to 0$ où $\epsilon = \frac{H}{L}$ désigne le rapport d'aspect entre la hauteur caractéristique H du fluide et la longueur d'onde L caractéristique des variations de la surface du fluide. On suppose en plus que le fluide est soumis à des forces capillaires. On obtient alors le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_t + (hu)_x = 0, \\ (hu)_t + \Big(\dfrac{6}{5} h\, u^2 + \dfrac{h^2}{2\,F^2}\Big)_x + \kappa\, h\, h_{xxx} = \dfrac{1}{\epsilon\, Re}\Big(\lambda\, h - \dfrac{u}{h}\Big), \end{array} \right. \tag{1}$$

où h et u désignent respectivement la hauteur et la vitesse moyenne du fluide, F et Re sont des nombres sans dimension qu'on appelle nombre de Froude et nombre de Reynolds et $\lambda = \frac{Re}{F^2}\sin(\theta)$ où θ mesure l'inclinaison de la pente. Le terme κ mesure la capillarité du fluide. Le système obtenu est un système hyperbolique avec un terme source de relaxation et un terme dispersif dû à la capillarité.

Le projet de thèse proposé est à la fois théorique et numérique.

2. Travail de thèse

Dans un premier temps, il s'agit d'étudier le caractère bien posé de ce système en étudiant le problème de Cauchy dans des espaces de Sobolev adéquates: on s'inspirera pour cela des travaux sur l'existence de solutions faibles de D. Bresch et B. Desjardins [2] d'une part et des travaux de S. Benzoni, R. Danchin et S. Descombes d'autre part [1]. Dans le même temps, le candidat devra mettre au point un algorithme numérique en sinspirant des solveurs classiques pour les problèmes hyperboliques [4].

Le candidat s'intéressera également au comportement en temps long des solutions au voisinage des solutions stationnaires en particulier l'étude de la stabilité de ces solutions, la principale difficulté étant que 0 est toujours valeur propre du système linéarisé et qu'il faut préciser l'allure du spectre au voisinage de 0 pour en déduire la stabilité (ou l'instabilité) des solutions stationnaires pour le système (non linéaire) complet.
Dans le cas où les solutions stationnaires sont instables, on étudiera l'existence d'ondes non linéaires: solitons, fronts ou ondes progressives périodiques. On utilisera pour cela

des outils standards issus de la théorie des équations différentielles (méthodes de bifurcations,...). La suite de cette étude peut se poursuivre par l'analyse de stabilité spectrale, linéaire, non linéaire de ce type de solutions en utilisant des fonctions de Evans et des méthodes d'estimations de fonctions de Green.

Des méthodes numériques seront alors mise au point pour l'étude spécifique de ces problèmes (comortement en temps long, étude de la stabilité).

Enfin, il s'agit d'étudier la limite de relaxation $\epsilon \to 0$ dans le système de Saint Venant. Lorsque $\epsilon \to 0$, on obtient formellement le système à l'ordre 0

$$u = \lambda\, h^2, \quad h_t + (\lambda\, h^3)_x = 0. \tag{2}$$

Cette approximation est peu satisfaisante car la solution de l'équation de conservation développe des singularités en temps fini. Le développement formel peut être poussé à l'ordre supérieur: on obtient alors à l'ordre 1 en ϵ:

$$\begin{aligned} u &= \lambda\, h^2 - \epsilon\, Re\, h \left((\frac{h}{F^2} - 3\lambda^2\, h^4) h_x + \kappa\, h\, h_{xxx} \right), \\ h_t + (\lambda\, h^3)_x &= \epsilon\, Re \left((\frac{h^2}{F^2} - 3\lambda^2\, h^5) h_x + \kappa\, h^2\, h_{xxx} \right)_x. \end{aligned}$$

D'une part, ces arguments formels pourront être utilisés pour construire desscémas numériques qui conservent de telles propriétés, ceci représente un premier pas dans l'étude de la stabilité numérique menant à la convergence du schéma.

D'autre part, la justification mathématique de ce développement limité a été justifié pour le système sans capillarité sur un intervalle de temps correspondant au temps d'existence d'une solution régulière de $h_t + (\lambda\, h^3)_x = 0$: dans un premier temps, il faut réussir à étendre ce résultat au système avec capillarité et ensuite en utilisant la régularité en temps long des solutions du système à l'ordre 1, obtenir un résultat d'approximation sur des intervalles de temps plus long.

References

[1] Benzoni-Gavage, Sylvie; Danchin, Raphael; Descombes, Stphane Well-posedness of one-dimensional Korteweg models. Electron. J. Differential Equations 2006, No. 59, 35 pp. (electronic).

[2] Bresch, Didier; Desjardins, Benoit; Lin, Chi-Kun On some compressible fluid models: Korteweg, lubrication, and shallow water systems. Comm. Partial Differential Equations 28 (2003), no. 3-4, 843–868.

[3] R. Eymard, T. Gallouët and R. Herbin, *Finite volume methods*, in Handbook of numerical analysis, Vol. VII, 713–1020, Handb. Numer. Anal., VII, North-Holland, Amsterdam, 2000.

[4] F. Filbet et C.-W. Shu Approximation of hyperbolic models for chemosensitive movement. SIAM J. Sci. Comput. 27 (2005), no. 3,