ACTIONS DE GROUPES SUR DES ESPACES HOMOGÈNES ET APPLICATIONS À LA THÉORIE DES NOMBRES

Sujet de thèse proposé par Georges Tomanov (tomanov@math.univ-lyon1.fr)

Plusieurs problèmes non-triviaux de la théorie des nombres peuvent être reformulés et après résolus en termes d'actions de groupes algébrique sur des espaces homogènes. Cette approche s'est averée extrêmenent efficace. Par exemple, en 1987 G.Margulis a confirmé [M1] la sélebre conjecture d'Oppenheim disant que si f est une forme quadratique réelle en $n \geq 3$ variables, non-dégénérée, indéfinie et non-proportionnelle à une forme à coéfficients rationnelles alors l'ensemble $f(\mathbb{Z}^n)$ de ses valeurs aux points entiers est dense dans $\mathbb{R}$. En effet Margulis a démontré que sous l'action par translations à gauche du groupe orthogonal $\mathrm{SO}(2,1)$ sur l'espace homogéne $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ chaque orbite relativement compacte est compacte. Le fait que ce dernier théorème implique la conjecture d'Oppenheim a était observé par le mathématicien indien M.S.Raghunathan au début des années 80 du siècle précédent.

Les résultats de Ratner

Le résultat de Margulis a ouvert la voie pour des découvertes passionnantes. Pour être plus précis fixons quelques notations et définitions. Soit G un groupe algébrique réel et linéaire, Γ un réseau de G (c.à.d. Γ est un sous-groupe discret de co-volume finie) et soit H un sous-groupe algébrique de G agissant sur G/Γ par translations à gauche. Si $x \in G/\Gamma$ on dit que la ferméture $\overline{Hx}$ de l'orbite Hx est *algébrique* s'il existe un sous-groupe L de G tel que $\overline{Hx} = Lx$. De manière similaire, on dit qu'une mesure μ borélienne et H-invariante sur G/Γ est algébrque s'il existe un sous-groupe L de G tel que μ est L-invariante et concentrée sur l'orbite (fermée) Lx. Dans ces travaux fondamentaux [R1] et [R2] Marina Ratner a démontré que si H est engendré par des matrices unipotents (c.à.d. par des matrices dont toutes valeurs propres sont égales à 1) alors la fermeture de chaque H-orbite est algébrique et, en plus, elle a démontré aussi que chaque mesure H-invariante et ergodique est algébrique. Notons que le résultat de Margulis cité ci-dessus est un cas très particulier des résultats de Ratner.

Actions de tores maximaux et la conjecture de Littlewood

Pour des applications différentes il est important de classifier les orbites avec fermétures algébriques ainsi que les mesures H-invariantes et algébriques dans le cas quand H est un tore déployé (c.à.d. tous les éléments de H sont simultanément diagonalisables sur $\mathbb{R}$). Pour éviter des complications techniques supposons que H est un tore déployé *maximal.* Rappelons que les tores déployés maximaux sont conjugués par conjugaison et que leur dimension commune s'appelle rang du groupe G (noté $\mathrm{rang}(G)$). Il est bien connu que si rang$(G) = 1$ alors G/Γ admet plusieurs orbites avec fermetures non-algébriques et, aussi, plusieurs mesures H-invariantes, ergodiques et non-algébriques. La conjecture suivante montre que si rang$(G) > 1$ on a essenielement la même type de *rigidité* comme dans les théorèmes de Ratner où H est engendré par des éléments unipotents.

Conjecture 1 (Margulis [M2]) *Soit H un tore déployé maximal de G.*

(i) Si $x \in G/\Gamma$ et il n'existe pas un sous-groupe L contenant H tel que Lx est fermé et admet des quotients de rang 1 alors $\overline{Hx}$ est algébrique;

(ii) Si μ est une mesure H-invariante et ergodique et il n'existe pas un sous-groupe L tel que Lx est fermé, supporte μ et admet des quotients de rang 1 alors μ est algébrique.

Notons que la Conjecture 1(ii) implique la Conjecture 1(i).

Considérons le cas particulier quand $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$ et $H = \mathrm{D}_n$ coincide avec le sous-groupe des matrices diagonales dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. La Conjecture 1(i) implique facilement:

Conjecture 2 (Margulis [M2]) *Si $\mathrm{D}_n x$, où $x \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$, est relativement compact alors $\mathrm{D}_n x$ est fermé et, donc, compact.*

L'importance de la Conjecture 2 est liée au fait qu'elle implique la célèbre conjecture de Littlewood:

Conjecture 3 (Littlewood, 1930) *Pour tous $u, v \in \mathbb{R}$,*

$$\liminf_{n\to\infty} n \parallel nu \parallel \parallel nv \parallel = 0,$$

où $\parallel w \parallel = \min_{\alpha\in\mathbb{Z}} |w - \alpha|$ est la distance de $w \in \mathbb{R}$ au nombre entier le plus proche.

Le rôle de l'entropie et d'autres problème ouverts

Dans l'article [MT] les résultats de Ratner sont re-démontrés de manière beaucoup plus courte. Une des nouvelles idées de [MT] est liée avec l'estimation des entropies des éléments diagonalisables de G fixant certaines mesures H-invariantes. Cette idée (en combinaisons avec d'autres) a permis de démontrer dans [EKL] la Conjecture 1(ii) pour l'action de D_n sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$, et *sous l'hypothèse complémentaire* que D_n contient des éléments avec entropie strictement positive. Le projet de recherche qu'on propose consiste de généraliser le résultats de [EKL] pour des groupes semisimples G différents de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Finalement notons qu'ils existent dans la même direction d'autres problèmes liés avec les articles [LW], [F] et [T].

References

[EKL] M.Einsiedler, A.Katok, E.Lindenstrauss: Invariant measures and the set of exceptions of Littlewood's conjecture. Annals of Math., vol.164 (2006), 513-560.

[F] D.Ferte: Weyl chamber flow on irreducible quotients of $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\times\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Transform. Groups, vol.11 (2006), 17-28.

[LW] E.Lindenstauss, B.Weiss: On sets invariant under the action of the diagonal group. Ergodic Theory and Dynam. Systems, vol.21 (2001), 1481-1500.

[M1] G.Margulis: Formes quadratiques indefinies et flots unipotent sur les espaces homogenes. C.R.Acad.Sci.Paris Ser.1, vol.304 (1987), 247-253.

[M2] G.Margulis: "Oppenheims conjecture" in Fields Medalists' Lectures, World Sci.Ser. 20th Century Math.5, World Sci., River Edge, N.J., 1997.

[MT] G.Margulis, G.Tomanov: Invariant measures for actions of unipotent groups over local fields on homogeneous spaces. Invent.Math., vol.116 (1994), 347-392.

[R1] M.Ratner: On Raghunathan's measure conjecture. Annals of Math., vol.134(3) (1991), 545-607.

[R2] M.Ratner: Raghunathan topological conjecture and distributions of unipotent flows. Duke Math.J., vol.63 (1991), 235-280.

[T] G.Tomanov: Values of decomposable forms at S-integral points and orbits of tori on homogeneous spaces. Duke Math.J., vol.138, no.3 (2007), 533-562.