Autour des q-séries, des formes modulaires quantiques et des nœuds toriques

Isaac KONAN
M2 AAG Université Paris Sud

Encadré par Jeremy LOVEJOY
Dans le cadre d'un stage de Mémoire
IRIF Paris Diderot

juin/juillet 2016

Résumé

Nous nous intéresserons ici à la notion de q-séries et certaines méthodes de calculs régulièrement utilisées dans leur manipulation. Plus spécifiquement, on se penchera sur leur lien étroit avec la théorie des nœuds.
On parlera également des formes modulaires quantiques et du rôle que les q-séries peuvent bien jouer dans ces dernières.

Sommaire

1 *Introduction aux notions de bases*

1.1 Les q-séries

Pour un complexe q fixé, on pose pour tout complexe a

$$(a;q)_k = \prod_{i=0}^{k-1}(1-aq^i),\ \forall\ k \in \mathbb{N}^*$$

et par convention $(a,q)_0 = 1$. On définit alors pour tout $|q| < 1$ et tout a complexe

$$(a;q)_\infty = \prod_{k\geq 0}(1-aq^k)\ \cdot$$

Par abus de langage, on notera souvent $(a)_k, (a)_\infty$ respectivement les valeurs $(a;q)_k, (a;q)_\infty$, en sous-entendant le fait que q soit fixé. On peut remarquer que pour tous entiers naturels m, n , on a

$$(a)_{m+n} = (a)_m(aq^m)_n\ \cdot$$

On a également pour tout $|q| < 1$ fixé et tout a complexe sous condition de définition

$$(a)_k = \frac{(a)_\infty}{(aq^k)_\infty}\ ,\ \forall k \in \mathbb{N}\cdot$$

On définit ainsi une q-série pour $|q| < 1$ comme une série avec des cœfficients comme produits de $(a)_n$. Un exemple important est celui des q-fonctions hypergéométriques

$${}_r\phi_s\left[\begin{matrix} a_1,\cdots,a_r \\ \\ b_1,\cdots,b_s\end{matrix}\ ;q,z\right] = \sum_{n\geq 0}\frac{(a_1)_n\cdots(a_r)_n}{(b_1)_n\cdots(b_s)_n(q)_n}z^n\cdot$$

Le cas $(r,s) = (1,0)$ donne la proposition suivante

Proposition 1.1. *Pour tout complexe a, on a*

$${}_1\phi_0\left[\begin{matrix} a \\ \\ -\end{matrix}\ ;q,z\right] = \sum_{n\geq 0}\frac{(a)_n}{(q)_n}z^n = \frac{(az)_\infty}{(z)_\infty}\ ,\ \forall\ |z| < 1\ \cdot \tag{1.1.1}$$

Preuve. On peut remarquer que $(z)_\infty$ est une série en z, et de plus qui ne s'annule pas sur $|z| < 1$. On peut donc l'inverser sur la boule unité ouverte. On se permet ainsi d'écrire sur la boule unité

$$F(a,z) = \frac{(az)_\infty}{(z)_\infty} = \sum_{n\geq 0}\alpha_n z^n\cdot$$

On a donc

$$(1-az)F(a,qz) = (1-z)F(a,z)$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \alpha_n q^n z^n - a\alpha_n q^n z^{n+1} = \sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n - \alpha_n z^{n+1}$$
$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \alpha_n z^{n+1} - a\alpha_n q^n z^{n+1} = \sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n - \alpha_n q^n z^n$$
$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} (1-aq^n)\alpha_n z^{n+1} = \sum_{n\geq 0} (1-q^n)\alpha_n z^n$$
$$\Rightarrow \alpha_{n+1} = \frac{1-aq^n}{1-q^{n+1}}\alpha_n$$

par unicité des cœfficients. En remarquant que $\alpha_0 = F(a,0) = 1$, on a donc

$$\alpha_n = \frac{\prod_{k=1}^n (1-aq^{k-1})}{\prod_{k=1}^n (1-q^k)} = \frac{(a)_n}{(q)_n}.$$

Réciproquement

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(a)_n}{(q)_n} z^n$$

est une série de rayon de convergence 1, vu que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-aq^n)}{1-q^{n+1}} = 1 \cdot$$

Encore par unicité des cœfficients, on a bien le résultat escompté. □

On introduit également les cœfficients q-binomiaux

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{cases} \dfrac{(q)_n}{(q)_k (q)_{n-k}} & \text{si } k \in [\![0;n]\!] \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui sont des polynômes en q, suivant la relation triangulaire analogue à celle de Pascal pour $n > 0$ et tout entier k

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}.$$

On remarque alors que ces cœfficients deviennent pour $q = 1$ les cœfiicients binomiaux classiques $\binom{n}{k}$. De plus, on a pour tous entiers $0 \leq k \leq n$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q)_n}{(q)_{n-k}(q)_k} = \frac{(q^{n-k+1})_k}{(q)_k} \tag{1.1.2}$$

En observant également que pour tous entiers naturels $N \geq n$ on a

$$(q^{-N})_n = \prod_{k=-N}^{-N+n-1} (1-q^k) = (-1)^n q^{-Nn+\binom{n}{2}} \frac{(q)_N}{(q)_{N-n}}\,, \tag{1.1.3}$$

et $(q^{-N})_n = 0$ dès que $n > N$, on obtient l'*identité q-binomiale* en remplaçant a par q^{-N} et z par $q^N z$ dans (1.1.1)

$$\sum_{n=0}^{N} \begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} z^n = (z)_N \cdot \tag{1.1.4}$$

Notons que l'identité, étant polynomiale, reste vraie pour tout q complexe, en particulier pour $q = 1$, et l'on retrouve l'identité binomiale dite de Newton

$$\sum_{n=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} (-1)^n z^n = (1-z)^N \cdot$$

On termine cette présentation des q-séries par une variante de l'identité q-binomiale obtenue en remplaçant N, n, z respectivement par $b-a, n-a, zq^a$:

$$\sum_{n=a}^{b} \frac{q^{\binom{n}{2}}(-z)^n}{(q)_{b-n}(q)_{n-a}} = (-z)^a q^{\binom{a}{2}} \frac{(zq^a)_{b-a}}{(q)_{b-a}} \cdot \tag{1.1.5}$$

L'on remarque cependant que cette dernière identité ne peut pas prendre comme valeurs de q certaines racines de l'unité.

1.2 Les paires de Bailey

Dans cette partie on fixe un complexe $|q| < 1$, et $a \neq q^n$ pour tout entier n strictement négatif.

Définition 1.1 (Bailey [3]). *Deux suites $(\alpha_n)_{n\geq 0}, (\beta_n)_{n\geq 0}$ forment une paire de Bailey relative à a si elles vérifient la relation*

$$\beta_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{(q)_{n-k}(aq)_{n+k}}\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \cdot \tag{1.2.1}$$

Une relation équivalente mais moins connue est celle de l'inversion pour $a \neq 1$

Lemme 1.1 (Andrews [1]). *Pour tout $a \neq 1$, on a*

$$\alpha_n = \frac{1-aq^{2n}}{1-a} \sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_{n+k}}{(q)_{n-k}} (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}} \beta_k\,, \tag{1.2.2}$$

ou encore

$$\alpha_n = \frac{1-aq^{2n}}{1-a} \cdot \frac{(a)_n}{(q)_n} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \sum_{k=0}^{n} (q^{-n})_k (aq^n)_k q^k \beta_k \cdot \tag{1.2.3}$$

Preuve. En effet, on peut facilement démontrer par récurrence sur m que pour tous entiers naturels m, n, on a

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(1-aq^{2k})(q^{-n})_k(a)_k q^{nk}}{(1-a)(q)_k(aq)_{n+k}} = \frac{(aq)_m(q^{1-n})_m q^{nm}}{(q)_m(aq)_{n+m}} ,$$

cette somme étant nulle dès que $m \geq n > 0$. On en déduit avec (1.1.3) une paire de Bailey relative à a dite triviale

$$\alpha_n = \frac{(1-aq^{2n})(a)_n(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{(1-a)(q)_n}$$

et

$$\beta_n = \delta_{n,0}$$

avec $\delta_{n,0}$ nul sauf en $n=0$ où il vaut 1. Si l'on pose pour tous entiers $0 \leq k \leq n$ et tout complexe $a \neq 1$

$$\lambda(a,n,k) = \frac{1-aq^{2n}}{1-a} \cdot \frac{(a)_{n+k}}{(q)_{n-k}}(-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}} ,$$

on a d'une part que la suite $(\lambda(a,n,0))_{n\geq 0}$ correspond à $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ de la paire de Bailey triviale relative à a, et

$$\lambda(a,n,k) = \lambda(aq^{2k}, n-k, 0) \cdot \frac{(1-aq^{2k})(a)_{2k}}{(1-a)} .$$

On a donc pour tous entiers $0 \leq l \leq n$

$$\sum_{k=l}^{n} \frac{\lambda(a,k,l)}{(q)_{n-k}(aq)_{n+k}} = \sum_{k=l}^{n} \frac{\lambda(aq^{2l}, k-l, 0)(1-aq^{2l})(a)_{2l}}{(q)_{(n-l)-(l-k)}(aq^{2l+1})_{(n-l)+(k-l)}(aq)_{2l}(1-a)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=l}^{n} \frac{\lambda(a,k,l)}{(q)_{n-k}(aq)_{n+k}} = \sum_{k=0}^{n-l} \frac{\lambda(aq^{2l}, k, 0)}{(q)_{(n-l)-k}(aq^{2l+1})_{(n-l)+k}} = \delta_{n-l,0} .$$

Les matrices triangulaires supérieures infinies

$$\left(\frac{1}{(q)_{n-k}(aq)_{n+k}}\right)_{n\geq k\geq 0}$$

et $(\lambda(a,k,l))_{k\geq l\geq 0}$ sont donc inverse l'une de l'autre, d'où la formule d'inversion. □

On peut également remarquer que les fonctions $\lambda_{n,k}$: $a \mapsto \lambda(a,n,k)$ admettent des limites en 1 ($\lambda_{0,0} \equiv 1$ et $(a)_{n+k}/(1-a) = (aq)_{n-1+k}$ pour $n \geq 1$). On a donc une inversion pour le cas $a = 1$ en modifiant l'écriture des $\lambda(a,n,k)$:

$$\lambda(a,0,0) = 1$$

et pour $n > 0$

$$\lambda(a,n,k) = (1-aq^{2n})\frac{(a)_{n+k-1}}{(q)_{n-k}}(-1)^{n-k}q^{\binom{n-k}{2}} \quad .$$

À partir d'une paire de Bailey relative à a, on peut créer une infinité de paires de Bailey relatives à a. L'exemple le plus important est énoncé dans le lemme qui suit.

Lemme 1.2 (lemme de Bailey [4])**.** *Si* (α_n, β_n) *est une paire de Bailey relative à* a*, alors* (α'_n, β'_n) *en est une, avec*

$$\alpha'_n = \frac{(b)_n(c)_n(aq/bc)^n}{(aq/b)_n(aq/c)_n}\alpha_n$$

et

$$\beta'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b)_k(c)_k(aq/bc)^k(aq/bc)_{n-k}}{(aq/b)_n(aq/c)_n(q)_{n-k}}\beta_k \quad .$$

Avant de prouver ce théorème, nous allons démontrer un autre résultat dû à Heine [2].

Proposition 1.2. *On a*

$${}_2\phi_1\left[\begin{matrix} u,v \\ \\ w\end{matrix} ; q, z\right] = \frac{(v)_\infty(uz)_\infty}{(w)_\infty(z)_\infty}\,{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} w/v, z \\ \\ uz\end{matrix} ; q, v\right]$$

et

$${}_2\phi_1\left[\begin{matrix} u,v \\ \\ w\end{matrix} ; q, z\right] = \frac{(uvz/w)_\infty}{(z)_\infty}\,{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} w/u, w/v \\ \\ w\end{matrix} ; q\ ,\ uvz/w\right] .$$

Preuve. La première égalité implique la deuxième. En effet, si la première est vraie, alors

$${}_2\phi_1\left[\begin{matrix} z, w/v \\ \\ uz\end{matrix} ; q, v\right] = \frac{(w/v)_\infty(vz)_\infty}{(uz)_\infty(v)_\infty}\,{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} uvz/w, v \\ \\ vz\end{matrix} ; q, w/v\right]$$

et

$${}_2\phi_1\left[\begin{matrix} v, uvz/w \\ \\ vz\end{matrix} ; q, w/v\right] = \frac{(uvz/w)_\infty(w)_\infty}{(vz)_\infty(w/v)_\infty}\,{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} w/u, w/v \\ \\ w\end{matrix} ; q, uvz/w\right] .$$

Les sommes ${}_2\phi_1$ étant symétriques pour les termes u, v, on déduit directement la deuxième égalité de la proposition. Pour la première égalité, on a

$${}_2\phi_1\left[\begin{matrix} u,v \\ \\ w\end{matrix} ; q, z\right] = \sum_{n\geq 0}\frac{(u)_n(v)_n}{(w)_n(q)_n}z^n = \frac{(v)_\infty}{(w)_\infty}\sum_{n\geq 0}\frac{(u)_n(wq^n)_\infty}{(q)_n(vq^n)_\infty}z^n ,$$

et donc d'après (1.1.1)

$$
{}_2\phi_1\left[\begin{matrix} u,v \\ \\ w\end{matrix} ;q,z\right] = \sum_{n\geq 0}\frac{(u)_n(v)_n}{(w)_n(q)_n}z^n = \frac{(v)_\infty}{(w)_\infty}\sum_{n\geq 0}\frac{(u)_n}{(q)_n}z^n\sum_{m\geq 0}\frac{(w/v)_m}{(q)_m}(vq^n)^m
$$

$$
\Rightarrow\ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} u,v \\ \\ w\end{matrix} ;q,z\right] = \frac{(v)_\infty}{(w)_\infty}\sum_{m\geq 0}\frac{(w/v)_m}{(q)_m}v^m\sum_{n\geq 0}\frac{(u)_n}{(q)_n}(zq^m)^n
$$

$$
\Rightarrow\ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} u,v \\ \\ w\end{matrix} ;q,z\right] = \frac{(v)_\infty}{(w)_\infty}\sum_{m\geq 0}\frac{(w/v)_m(uzq^m)}{(q)_m(zq^m)}v^m
$$

$$
\Rightarrow\ {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} u,v \\ \\ w\end{matrix} ;q,z\right] = \frac{(v)_\infty(uz)_\infty}{(w)_\infty(z)_\infty}\sum_{m\geq 0}\frac{(w/v)_m(z)_m}{(q)_m(uz)_m}v^m\ .
$$

□

La deuxième égalité donne avec (1.1.1)

$$
\sum_{n\geq 0}\frac{(u)_n(v)_n}{(w)_n(q)_n}z^n = \left[\sum_{n\geq 0}\frac{(uv/w)_n}{(q)_n}z^n\right]\left[\sum_{n\geq 0}\frac{(w/u)_n(w/v)_n}{(w)_n(q)_n}z^n\right]\ .
$$

On déduit par produit de séries pour tout entier naturel n

$$
\frac{(u)_n(v)_n}{(w)_n(q)_n} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(w/u)_k(w/v)_k}{(w)_k(q)_k}\cdot\frac{(uv/w)_{n-k}}{(q)_{n-k}}\cdot \tag{1.2.4}
$$

Avec ce dernier outil nous pouvons démontrer sans difficuté le lemme de Bailey.

Preuve du lemme de Bailey. On a $\forall n\geq 0$

$$
\begin{aligned}
\beta'_n &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(b)_k(c)_k(aq/bc)^k(aq/bc)_{n-k}}{(aq/b)_n(aq/c)_n(q)_{n-k}}\beta_k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}\frac{(b)_k(c)_k(aq/bc)^k(aq/bc)_{n-k}}{(aq/b)_n(aq/c)_n(q)_{n-k}(q)_{k-l}(aq)_{k+l}}\alpha_l \\
&= \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=l}^{n}\frac{(b)_k(c)_k(aq/bc)^k(aq/bc)_{n-k}}{(aq/b)_n(aq/c)_n(q)_{n-k}(q)_{k-l}(aq)_{k+l}}\alpha_l\ .
\end{aligned}
$$

On pose comme dans la démonstration du lemme précédent

$$
\Lambda(a,b,c,n,l) = \sum_{k=l}^{n}\frac{(b)_k(c)_k(aq/bc)^k(aq/bc)_{n-k}}{(aq/b)_n(aq/c)_n(q)_{n-k}(q)_{k-l}(aq)_{k+l}}\ .
$$

On a donc

$$\begin{aligned}\Lambda(a,b,c,n,l) &= \frac{(b)_l(c)_l(aq/bc)^l}{(aq/b)_l(aq/c)_l(aq)_{2l}} \\ &\quad \times \sum_{k=l}^{n} \frac{(bq^l)_{k-l}(cq^l)_{k-l}(aq/bc)^{k-l}(aq/bc)_{n-k}}{(aq^{l+1}/b)_{n-l}(aq^{l+1}/c)_{n-l}(q)_{n-k}(q)_{k-l}(aq^{2l+1})_{k-l}} \\ &= \frac{(b)_l(c)_l(aq/bc)^l}{(aq/b)_l(aq/c)_l(aq)_{2l}} \Lambda(aq^{2l}, bq^l, cq^l, n-l, 0) \quad \cdot \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Pour montrer que

$$\Lambda(a,b,c,n,l) = \frac{(b)_l(c)_l(aq/bc)^l}{(aq/b)_l(aq/c)_l(q)_{n-l}(aq)_{n+l}} \ ,$$

il faut et il suffit d'après (1.2.5) de montrer que

$$\Lambda(a,b,c,n,0) = \frac{1}{(q)_n(aq)_n} \ \cdot$$

Mais c'est exactement (1.2.4) pour u, v, w valant $aq/b, aq/c, aq$. □

Le dernier résultat que nous donnerons sur les paires de Bailey concerne le cas de la transformation du lemme Bailey quand $b, c \to \infty$. En effet $(x)_n$ est un polynôme en x de degré n, de cœfficient dominant $(-1)^n q^{\binom{n}{2}}$ et de terme constant 1. On a donc par passage à la limite une nouvelle paire de Bailey relative à a.

$$\begin{aligned} \alpha'_n &= a^n q^{n^2} \alpha_n \\ \beta'_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k q^{k^2}}{(q)_{n-k}} \beta_k \ \cdot \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

1.3 Nœuds toriques et polynômes N-colorés de Jones

On rappelle qu'un nœud dans l'espace est une courbe lisse qui n'est pas homotope à un cercle. Par abus on fait du cercle un nœud dénoué, constituant ainsi l'élément neutre. On le note K_0. Pour un nœud K, on note K^* son image par un plan. La théorie des nœuds étudie entre autre le classement de ces objets par équivalence homotopique, la classe du cercle étant nommé "dénoué". Une famille particulière de nœuds est celle de nœuds toriques (autour de tores), notés $T_{(s,t)}$, avec $s \wedge t = 1$, représentés par les équations paramétriques

$$T_{(s,t)} : \begin{cases} x(\theta) &= (R + r\cos(t\theta))\cos(s\theta) \\ y(\theta) &= (R + r\cos(t\theta))\sin(s\theta) \\ z(\theta) &= r\sin(t\theta) \end{cases} , \theta \in [\![0; 2\pi]\!] \ , \ 0 < r < R \ \cdot$$

Nous nous contenterons d'énoncer certains résultats de la théorie des nœuds sans les démontrer. Un outil utile est la notion de polynômes N-colorés de Jones.

On les note $J_N(K,q)$, où K est le nœud et q la variable, et sont des polynômes en $q^{\pm 1}$. Les propriétés qui nous intéressent sont les suivantes [11]:

$$\begin{array}{c} J_N(K_0,q)=1 \\ K\equiv K' \Rightarrow J_N(K,q)=J_N(K',q) \\ J_N(K^*,q)=J_N(K,q^{-1})\cdot \end{array}$$

Ces polymômes sont explicitement connus pour les nœuds toriques [13],[14] :

$$J_N(T_{(s,t)},q)=\frac{q^{\frac{1}{4}st(1-N^2)}}{q^{\frac{N}{2}}-q^{-\frac{N}{2}}}\sum_{j=\frac{1-N}{2}}^{\frac{N-1}{2}} q^{stj^2}\left(q^{-(s+t)j+\frac{1}{2}}-q^{-(s-t)j-\frac{1}{2}}\right)\cdot$$

On obtient donc

$$J_N(T_{(s,t)},q)=\frac{q^{\frac{1}{4}st(1-N^2)-\frac{N+1}{2}}}{1-q^{-N}}\left[\sum_{j=\frac{1-N}{2}}^{\frac{N-1}{2}} q^{(sj-1)(tj-1)}-\sum_{j=\frac{1-N}{2}}^{\frac{N-1}{2}} q^{tj(sj+1)-sj}\right]\cdot$$

En effectuant un changement de variable $k=sj-1$ pour la première somme et $k=sj$ pour la seconde, on a

$$J_N(T_{(s,t)},q)=\frac{q^{\frac{1}{4}st(1-N^2)-\frac{N+1}{2}}}{1-q^{-N}}\left[\sum_{k\in E_1} q^{\frac{t}{s}k(k+1)-k}-\sum_{k\in E_2} q^{\frac{t}{s}k(k+1)-k}\right],$$

avec

$$E_1=\left\{\frac{s(1-N)}{2}+su-1\,/\,u\in[\![0,N-1]\!]\right\}$$

et

$$E_2=\left\{\frac{s(1-N)}{2}+su\,/\,u\in[\![0,N-1]\!]\right\}\cdot$$

On a donc pour $s>1$

$$J_N(T_{(s,t)},q)=\frac{q^{\frac{1}{4}st(1-N^2)-\frac{N+1}{2}}}{1-q^{-N}}\sum_{k\in\sqcup_{i=1}^{2}E_i}(-1)^{i-1}q^{\frac{t}{s}k(k+1)-k}\quad\cdot \tag{1.3.1}$$

On peut également effectuer le changement de variable $k=tj-1$ pour la première somme et $k=-tj$ pour la deuxième et l'on obtient

$$J_N(T_{(s,t)},q)=\frac{q^{\frac{1}{4}st(1-N^2)-\frac{N+1}{2}}}{1-q^{-N}}\left[\sum_{k\in E_1'} q^{\frac{s}{t}k(k+1)-k}-\sum_{k\in E_2'} q^{\frac{s}{t}k(k+1)-k}\right],$$

avec

$$E_1'=\left\{\frac{t(1-N)}{2}+tu-1\,/\,u\in[\![0,N-1]\!]\right\}$$

et

$$E'_2 = \left\{ \frac{t(1-N)}{2} - tu \,/\, u \in [\![0, N-1]\!] \right\} = \left\{ \frac{t(1-N)}{2} + tu \,/\, u \in [\![0, N-1]\!] \right\} \cdot$$

On a ainsi pour $t > 1$

$$J_N(T_{(s,t)}, q) = \frac{q^{\frac{1}{4}st(1-N^2)-\frac{N+1}{2}}}{1-q^{-N}} \sum_{k \in \sqcup_{i=1}^2 E'_i} (-1)^{i-1} q^{\frac{s}{t}k(k+1)-k} \quad . \tag{1.3.2}$$

On peut ainsi remarquer que $J_N(T_{(s,t)}, q) = J_N(T_{(t,s)}, q)$. Pour le cas des nœuds $T(2, 2t+1)$, on a

$$E_1 = \{-N + 2u \,/\, u \in [\![0, N-1]\!]\}$$

et

$$E_2 = \{-N + 2u + 1 \,/\, u \in [\![0, N-1]\!]\} \cdot$$

On a donc

$$J_N(T_{(2,2t+1)}, q) = (-1)^N \frac{q^{t-\frac{N}{2}-\frac{2t+1}{2}N^2}}{1-q^{-N}} \sum_{k=-N}^{N-1} (-1)^k q^{\frac{2t+1}{2}k(k+1)-k} \,. \tag{1.3.3}$$

Il existe un lien entre les polynômes de Jones et les paires de Bailey. En effet, une relation due à Habiro [6], dite expansion cyclotomique, donne

$$J_N(K, q) = \sum_{n \geq 0} C_n(K, q)(q^{1-N})_n(q^{1+N})_n = \sum_{n=0}^{N-1} C_n(K, q)(q^{1-N})_n(q^{1+N})_n \tag{1.3.4}$$

avec $C_n(K, q)$ des polynômes en $q^{\pm 1}$. Si l'on récrit

$$J_{N+1}(K, q) = \sum_{n=0}^{N} (q^{-N})_n (q^{2+N})_n C_n(K, q) \,,$$

on remarque d'après (1.2.3)

$$\alpha_n = \frac{1-q^{2n+2}}{1-q^2} \cdot \frac{(q^2)_n}{(q)_n} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} J_{n+1}(K, q)$$

ou encore

$$\alpha_n = \frac{(1-q^{2n+2})(1-q^{n+1})}{(1-q^2)(1-q)} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} J_{n+1}(K, q)$$

et

$$\beta_n = q^{-n} C_n(K, q)$$

forment une paire de Bailey relative à q^2. On obtient donc de façon équivalante

$$q^{-n} C_n(K, q) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-q^{2k+2})(1-q^{k+1})}{(q)_{n-k}(q^3)_{n+k}(1-q^2)(1-q)} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} J_{k+1}(K, q)$$

$$\Rightarrow q^{-n}C_n(K,q) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-q^{2k+2})(1-q^{k+1})}{(q)_{n-k}(q)_{n+k+2}}(-1)^k q^{\binom{k}{2}} J_{k+1}(K,q)$$

et donc

$$C_n(K,q) = -q^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(1-q^{2k})(1-q^{k})}{(q)_{n+1-k}(q)_{n+1+k}}(-1)^k q^{\frac{k(k-3)}{2}} J_k(K,q)\cdot \tag{1.3.5}$$

En prenant $K = T^*_{(2,2t+1)}$, on a

$$C_n(T^*_{(2,2t+1)},q) = -q^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(1-q^{2k})(1-q^{k})}{(q)_{n+1-k}(q)_{n+1+k}}(-1)^k q^{\frac{k(k-3)}{2}} J_k(T_{(2,2t+1)},q^{-1})$$

et d'après (1.3.3)

$$C_n(T^*_{(2,2t+1)},q) = -q^{n+1-t}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1-q^{2k}}{(q)_{n+1-k}(q)_{n+1+k}} q^{-k+(t+1)k^2} \sum_{l=-k}^{k-1}(-1)^l q^{-\frac{2t+1}{2}l(l+1)+l}\ .$$

On peut donc écrire

$$-q^{t-n}C_{n-1}(T^*_{(2,2t+1)},q) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1-q^{2k}}{(q)_{n-k}(q)_{n+k}} q^{(t+1)k^2-k} \sum_{l=-k}^{k-1}(-1)^l q^{-\frac{2t+1}{2}l^2-\frac{2t-1}{2}l} \tag{1.3.6}$$

et mettre fin à cette série de résultats sur les nœuds toriques.

2 *Formes modulaires quantiques et $q-$séries*

Les formes modulaires quantiques sont des fonctions f sur $\mathbb{Q}$ (ou de façon équivalente, sur les racines de l'unité $e^{2i\pi z}$) telles que

$$f(z) - \chi(\gamma)(cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) ,$$

avec $\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ et χ un caractère de $SL_2(\mathbb{Z})$, possède de bonnes propriétés comme l'analycité et la continuité. On rappelle que pour les formes modulaires, la dernière expression vaut 0. Ces formes modulaires sont introduites par Zagier. Un exemple célèbre de forme modulaire est la série de Kontsevich-Zagier [15]

$$F(q) = \sum_{n\geq 0} (q)_n \cdot \tag{2.0.7}$$

Cette somme est bien définie sur les racines de l'unité car si $q^n = 1$, alors $(q)_m = 0$ pour $m \geq n$, et donc $F(q)$ est une somme est finie. De plus elle n'est pas définie sur une boule ouverte, les termes n'ayant pas de limite finie dès que $|q| > 1$ et une limite valant 1 quand $|q| < 1$.

2.1 *$U-$fonctions et théorème d'inversion*

La U-fonction génératrice des suites uni-modales, i.e $(a_k)_{1\leq k\leq s}$, $0 < a_1 < \cdots < a_r > a_{r+1} > \cdots > a_s > 0$, est définie par

$$U(x,q) = \sum_{n\geq 0} (-xq)_n(-x^{-1}q)_n q^{n+1} = \sum_{m\in\mathbb{Z},n\geq 1} u(m,n)x^m q^n \tag{2.1.1}$$

avec $u(m,n)$ le nombre de suites uni-modales $(a_k)_{1\leq k\leq s}$ telles que $a_1+\cdots+a_s = n$ et $(s-r)-(r-1) = s-2r+1 = m$. Cette est définie seulement pour $|q| < 1$ pour un x donné, mais peut être étendue aux racines de l'unité quand $x = -1$, la somme étant alors finie. Elle devient dans ce cas une forme modulaire quantique. Le premier théorème est un lien établi par Bryson et.Al. [5] entre (2.0.7) et (2.1.1) pour des racines primitives ξ_N.

Théorème 2.1. *Pour ξ_N une racine primitive N-ième de l'unité, on a*

$$F(\xi_N^{-1}) = U(-1,\xi_N) \cdot \tag{2.1.2}$$

Preuve. On pose

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{N-1} \prod_{k=1}^{n} (x - \xi_N^{-k}) \cdot$$

On a donc

$$f(\xi_N^{-1}x) = 1 + \sum_{n=1}^{N-1} \prod_{k=1}^{n} (\xi_N^{-1}x - \xi_N^{-k}) = 1 + \sum_{n=1}^{N-1} \xi_N^{-n} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \xi_N^{-k})$$

$$\Rightarrow f(\xi_N^{-1}x) = 1 + (x-1)\sum_{n=1}^{N-1}\xi_N^{-n}\prod_{k=1}^{n-1}(x-\xi_N^{-k})$$

$$\Rightarrow f(\xi_N^{-1}x) = 1 + (x-1)\left[x\sum_{n=1}^{N-1}\prod_{k=1}^{n-1}(x-\xi_N^{-k}) - \sum_{n=1}^{N-1}\prod_{k=1}^{n}(x-\xi_N^{-k})\right]$$

$$\Rightarrow f(\xi_N^{-1}x) = 1 + (x-1)\left[x\left(f(x) - \prod_{k=1}^{N-1}(x-\xi_N^{-k})\right) - f(x) + 1\right]$$

$$\Rightarrow f(\xi_N^{-1}x) = 1 + (x-1)^2 f(x) - (x-1)x\left[\prod_{k=1}^{N-1}(x-\xi_N^{-k})\right] + (x-1)$$

avec comme convention le produit vide qui vaut 1. Ainsi

$$f(\xi_N^{-1}x) = (x-1)^2 f(x) - x(x^N-1) + x = (x-1)^2 f(x) + x(2-x^N)\cdot \quad (2.1.3)$$

On pose en outre la suite de polynômes $(u_k)_{1\leq k\leq N}$ telle que

$$(2-x^N)u_k(\xi_N^{-k}x) = f(\xi_N^{-k}x) - f(x)\prod_{i=0}^{k-1}(\xi_N^{-i}x-1)^2$$

ou encore

$$(2-x^N)u_k(x) = \left[f(x) - f(\xi_N^k x)\prod_{i=1}^{k}(\xi_N^i x-1)^2\right]\cdot \quad (2.1.4)$$

On a donc d'après (2.1.3)

$$u_1(x) = \xi_N x$$

et

$$u_N(x) = \frac{f(x)(1-(x^N-1)^2)}{(2-x^N)} = x^N f(x)\cdot$$

De plus par (2.1.4) on obtient pour tout $1 \leq k \leq N-1$

$$(2-x^N)(u_{k+1}(x)-u_k(x)) = \left[f(\xi_N^k x) - (\xi_N^{k+1}x-1)^2 f(\xi_N^{k+1}x)\right]\prod_{i=1}^{k}(\xi_N^i x-1)^2$$

qui donne par (2.1.3)

$$(2-x^N)(u_{k+1}(x)-u_k(x)) = \xi_N^{k+1}x(2-x^N)\prod_{i=1}^{k}(\xi_N^i x-1)^2$$

et donc

$$u_{k+1}(x)-u_k(x) = \xi_N^{k+1}x\prod_{i=1}^{k}(\xi_N^i x-1)^2\cdot$$

On a donc par somme téléscopique

$$u_N(x) - u_1(x) = x \sum_{k=1}^{N-1} [(x\xi_N;\xi_N)_k]^2 \xi_N^{k+1}$$

$$\Rightarrow x^N f(x) = x \sum_{k=0}^{N-1} [(x\xi_N;\xi_N)_k]^2 \xi_N^{k+1} \cdot$$

On obtient le résultat voulu en prenant $x = 1$ dans la dernière égalité. $\square$

Sur la base des polynômes de Jones, [7] Hikami introduit une famille de formes modulaires quantiques généralisant la série de Kontsevich-Zagier

$$F_t(q) = q^t \sum_{k_t \geq \cdots \geq k_1 \geq 0} (q)_{k_t} \prod_{i=1}^{t-1} q^{k_i(k_i+1)} \begin{bmatrix} k_{i+1} \\ k_i \end{bmatrix} \cdot \tag{2.1.5}$$

Elles sont définies pour les racines de l'unité à cause du caractère polynômiale des cœfficients q-binomiaux. Ici $F_1(q) = qF(q)$. On définit de manière analogue les U-fonctions généralisées par

$$\begin{aligned} U_t(x,q) = q^{-t} & \sum_{k_t \geq \cdots \geq k_1 \geq 1} (-xq)_{k_t-1} (-x^{-1}q)_{k_t-1} q^{k_t} \\ & \times \prod_{i=1}^{t-1} q^{k_i^2} \begin{bmatrix} k_{i+1} - k_i - i + 2\sum_{j=1}^{i} k_j \\ k_{i+1} - k_i \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

définies pour $|q| < 1$ et s'étendant aux racines de l'unité pour $x = -1$, la somme étant finie. Ici $U_1(x,q) = q^{-1}U(x,q)$. On peut ainsi géneraliser le théorème précédent [8].

Théorème 2.2. *Pour ξ_N une racine primitive N-ième de l'unité, on a*

$$F_t(\xi_N^{-1}) = U_t(-1, \xi_N) \cdot \tag{2.1.7}$$

Le résultat se base essentiellement sur l'égalité

$$J_N(T^*_{(2,2t+1)}, \xi_N) = J_N(T_{(2,2t+1)}, \xi_N^{-1}) \cdot$$

Nous démontrerons cette propriété en établissant dans un premier temps un lien entre $J_N(T_{(2,2t+1)}, -)$ et F_t, puis dans la deuxième partie, un lien entre $J_N(T^*_{(2,2t+1)}, -)$ et $U_t(-1, -)$.

2.2 L'équation récursive de $J_N(T_{(2,2t+1)}, q)$ et lien avec F_t

On rappelle (1.3.3) :

$$J_N(T_{(2,2t+1)}, q) = (-1)^N \frac{q^{t-\frac{N}{2}-\frac{2t+1}{2}N^2}}{1-q^{-N}} \sum_{k=-N}^{N-1} (-1)^k q^{\frac{2t+1}{2}k(k+1)-k} \, .$$

On a donc

$$J_N(T_{(2,2t+1)},q) = (-1)^N \frac{q^{t-\frac{N}{2}-\frac{2t+1}{2}N^2}}{1-q^{-N}}(-1)^N q^{\frac{2t+1}{2}N(N-1)+N}(1-q^{1-2N})$$
$$-\frac{q^{t-(2t+1)N}(1-q^{1-N})}{1-q^{-N}} \cdot (-1)^{N-1}\frac{q^{t-\frac{N-1}{2}-\frac{2t+1}{2}(N-1)^2}}{1-q^{-N+1}}$$
$$\times \sum_{k=-N+1}^{N-2}(-1)^k q^{\frac{2t+1}{2}k(k+1)-k}$$

et donc

$$J_N(T_{(2,2t+1)},q) = q^{t(1-N)}\frac{(1-q^{1-2N})}{1-q^{-N}} - q^{t-(2t+1)N}\frac{1-q^{1-N}}{1-q^{-N}}J_{N-1}(T_{(2,2t+1)},q)\cdot \tag{2.2.1}$$

En posant $H_N = q^{t(N-1)}(1-q^{-N})J_N(T_{(2,2t+1)},q)$, on obtient la relation de récurrence suivante

$$H_N = (1-q^{1-2N}) - q^{2t-(2t+1)N}H_{N-1}\,, \tag{2.2.2}$$

avec $H_1 = 1-q^{-1}$ car $J_1(T_{(2t+1)},q) = 1$. On peut même étendre la relation avec $H_0 = 0$. On reprend ici la démonstration d'Hikami [9] en introduisant une fonction assez particulière, qui respectera une relation de récurrence étroitement liée à la dernière.

Définition 2.1. *On définie la fonction pour $|q| < 1$ fixé*

$$H_t(x) = \sum_{k_t,\cdots,k_1\geq 0}(x)_{k_t+1}x^{k_t}\prod_{i=1}^{t-1}q^{k_i(k_i+1)}x^{2k_i}\begin{bmatrix} k_{i+1} \\ k_i \end{bmatrix}$$

pour tout $|x| < 1$ et $x = q^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

On a donc

$$H_t(x) = \sum_{k_t\geq\cdots\geq k_1\geq 0}(x)_{k_t+1}x^{k_t}\prod_{i=1}^{t-1}q^{k_i(k_i+1)}x^{2k_i}\begin{bmatrix} k_{i+1} \\ k_i \end{bmatrix}.$$

Notons que le deuxième ensemble de définition est dû au fait que la somme soit finie pour ces valeurs. On a donc la proposition suivante:

Proposition 2.1. *On a la relation pour $x \neq 1$.*

$$H_t(x) = 1 - qx^2 - q^{2t}x^{2t+1}H_t(qx)\cdot \tag{2.2.3}$$

Notons que si cette proposition est vraie, alors en posant $h_N = H_t(q^{-N})$, on aura alors la même relation de récurrence qu'en (2.2.2) avec également $h_0 = 0 = H_0$. Ainsi,

$$H_N = H_t(q^{-N})$$

et donc

$$q^{t(N-1)}(1-q^{-N})J_N(T_{(2,2t+1)},q) = \sum_{k_t,\cdots,k_1\geq 0}(q^{-N})_{k_t+1}q^{-Nk_t}\prod_{i=1}^{t-1}q^{k_i(k_i+1-2N)}\left[\begin{array}{c}k_{i+1}\\ k_i\end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow J_N(T_{(2,2t+1)},q) = q^{t(1-N)}\sum_{k_t\geq\cdots\geq k_1\geq 0}(q^{1-N})_{k_t}q^{-Nk_t}\prod_{i=1}^{t-1}q^{k_i(k_i+1-2N)}\left[\begin{array}{c}k_{i+1}\\ k_i\end{array}\right]\cdot$$

Cette écriture étant polynomiale en q, q^{-1}, car les termes nuls dès que $k_t \geq N$, elle sera donc bien définie pour les racines de l'unité. En particulier on aura

$$J_N(T_{(2,2t+1)},\xi_N^{-1}) = F_t(\xi_N^{-1})\cdot \tag{2.2.4}$$

Preuve de la proposition 2.1. On pose pour $m = 0,\cdots,t-1$

$$\begin{aligned}H_t^{(m)}(x,y,z_1,\cdots,z_{t-1}) = \sum_{k_t,\cdots,k_1\geq 0}&(x)_{k_t}y^{k_t}\prod_{i=1}^{m-1}q^{(k_i)^2}z_i^{2k_i}\left[\begin{array}{c}k_{i+1}\\ k_i\end{array}\right]\\ &\times\quad q^{(k_m)^2}z_m^{2k_m}\left[\begin{array}{c}k_{m+1}+1\\ k_m\end{array}\right]\\ &\times\prod_{i=m+1}^{t-1}q^{k_i(k_i+1)}z_i^{2k_i}\left[\begin{array}{c}k_{i+1}\\ k_i\end{array}\right]\cdot\end{aligned}$$

On a donc

$$H_t(x) = (1-x)H_t^{(0)}(qx,x,x,\cdots,x) \tag{2.2.5}$$

En appliquant la relation

$$\left[\begin{array}{c}n+1\\ k\end{array}\right] = q^k\left[\begin{array}{c}n\\ k\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}n\\ k-1\end{array}\right],$$

on obtient pour $m = 1,\cdots,t-1$

$$\begin{aligned}H_t^{(m)}(x,y,z_1,\cdots,z_{t-1}) &= H_t^{(0)}(x,y,q^{-\frac{1}{2}}z_1,\cdots,q^{-\frac{1}{2}}z_{m-1},z_m,\cdots,z_{t-1})\\ &+qz_m^2H_t^{(m-1)}(x,y,z_1,\cdots,z_{m-1},q^{\frac{1}{2}}z_m,z_{m+1}\cdots,z_{t-1})\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

qui utilisé de manière récursive donne

$$\begin{aligned}H_t^{(t-1)}(qx,y,q^{\frac{1}{2}}z_1,\cdots,q^{\frac{1}{2}}z_{t-1}) &= H_t^{(0)}(qx,y,z_1,\cdots,z_{t-2},q^{\frac{1}{2}}z_{t-1})\\ &+q^2z_{t-1}^2H_t^{(0)}(qx,y,z_1,\cdots,z_{t-3},q^{\frac{1}{2}}z_{t-2},qz_{t-1}))\\ &+\cdots+q^{2(t-2)}z_{t-1}^2\cdots z_2^2H_t^{(0)}(qx,y,q^{\frac{1}{2}}z_1,qz_2,\cdots,qz_{t-1}))\\ &+q^{2(t-1)}z_{t-1}^2\cdots z_1^2H_t^{(0)}(qx,y,qz_1,\cdots,qz_{t-1}))\cdot\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

De même en utilisant la relation

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{n+1-k} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix},$$

on a pour $m = 1, \cdots, t-2$

$$\begin{aligned} H_t^{(m)}(x, y, z_1, \cdots, z_{t-1}) &= H_t^{(0)}(x, y, q^{-\frac{1}{2}} z_1, \cdots, q^{-\frac{1}{2}} z_m, z_{m+1}, \cdots, z_{t-1}) \\ &\quad + q z_m^2 H_t^{(m-1)}(x, y, z_1, \cdots, z_m, q^{\frac{1}{2}} z_{m+1}, z_{m+2} \cdots, z_{t-1}) \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

et pour $m = t-1$

$$\begin{aligned} H_t^{(t-1)}(x, y, z_1, \cdots, z_{t-1}) &= H_t^{(0)}(x, y, q^{-\frac{1}{2}} z_1, \cdots, q^{-\frac{1}{2}} z_{t-1}) \\ &\quad + q z_{t-1}^2 H_t^{(t-2)}(x, qy, z_1, \cdots, z_{t-1}) \cdot \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

On obtient de même que (2.2.7)

$$\begin{aligned} H_t^{(t-2)}(qx, y, q^{\frac{1}{2}} z_1, \cdots, q^{\frac{1}{2}} z_{t-1}) &= H_t^{(0)}(qx, y, z_1, \cdots, z_{t-2}, q^{\frac{1}{2}} z_{t-1}) \\ &\quad + q^2 z_{t-2}^2 H_t^{(0)}(qx, y, z_1, \cdots, z_{t-3}, q^{\frac{1}{2}} z_{t-2}, q z_{t-1})) \\ &\quad + \cdots + q^{2(t-3)} z_{t-2}^2 \cdots z_2^2 H_t^{(0)}(qx, y, z_1, q^{\frac{1}{2}} z_2, q z_3, \cdots, q z_{t-1})) \\ &\quad + q^{2(t-2)} z_{t-2}^2 \cdots z_1^2 H_t^{(0)}(qx, y, q^{\frac{1}{2}} z_1, q z_2, \cdots, q z_{t-1})) \cdot \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

On a également d'une part

$$\begin{aligned} H_t^{(t-1)}(qx, y, z_1, \cdots, z_{t-1}) &= \sum_{k_t=1}^{\infty} \sum_{k_{t-1}=0}^{k_t} \cdots \sum_{k_1=0}^{k_2} (qx)_{k_t-1} y^{k_t-1} \prod_{i=1}^{t-1} q^{(k_i)^2} z_i^{2k_i} \begin{bmatrix} k_{i+1} \\ k_i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(1-x)y} [H_t^{(0)}(x, y, q^{-\frac{1}{2}} z_1, \cdots, q^{-\frac{1}{2}} z_{t-1}) - 1] \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} H_t^{(0)}(qx, y, z_1, \cdots, z_{t-1}) &= 1 + \sum_{k_t=1}^{\infty} \sum_{k_{t-1}=0}^{k_t} \cdots \sum_{k_1=0}^{k_2} (qx)_{k_t} y^{k_t} \prod_{i=1}^{t-1} q^{k_i(k_i+1)} z_i^{2k_i} \begin{bmatrix} k_{i+1} \\ k_i \end{bmatrix} \\ &= 1 + \sum_{k_t=1}^{\infty} \sum_{k_{t-1}=0}^{k_t} \cdots \sum_{k_1=0}^{k_2} (qx)_{k_t-1} (1 - x q^{k_t}) y^{k_t} \\ &\qquad \times \prod_{i=1}^{t-1} q^{k_i(k_i+1)} z_i^{2k_i} \begin{bmatrix} k_{i+1} \\ k_i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1-x} [H_t^{(0)}(x, y, z_1, \cdots, z_{t-1}) - x H_t^{(0)}(x, qy, z_1, \cdots, z_{t-1})] \cdot \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

En combinant successivement (2.2.12), (2.2.9) et (2.2.11) on obtient

$$H_t^{(0)}(x,y,z_1,\cdots,z_{t-1}) - xH_t^{(0)}(x,qy,z_1,\cdots,z_{t-1}) = \frac{1}{y}(H_t^{(0)}(x,y,z_1,\cdots,z_{t-1}) - 1)$$
$$-q^2(1-x)z_{t-1}^2 H_t^{(t-2)}(qx,qy,q^{\frac{1}{2}}z_1,\cdots,q^{\frac{1}{2}}z_{t-1})\cdot$$

qui donne avec (2.2.10)

$$\begin{aligned}(1-\frac{1}{y})H_t^{(0)}(x,y,z_1,\cdots,z_{t-1}) - xH_t^{(0)}(x,qy,z_1,\cdots,z_{t-1}) + \frac{1}{y} = \\ -q^2(1-x)z_{t-1}^2[H_t^{(0)}(qx,qy,z_1,\cdots,z_{t-2},q^{\frac{1}{2}}z_{t-1}) \\ +q^2 z_{t-2}^2 H_t^{(0)}(qx,qy,z_1,\cdots,z_{t-3},q^{\frac{1}{2}}z_{t-2},qz_{t-1})) \\ +\cdots+q^{2(t-3)}z_{t-2}^2\cdots z_2^2 H_t^{(0)}(qx,qy,z_1,q^{\frac{1}{2}}z_2,qz_3,\cdots,qz_{t-1})) \\ +q^{2(t-2)}z_{t-2}^2\cdots z_1^2 H_t^{(0)}(qx,y,q^{\frac{1}{2}}z_1,qz_2,\cdots,qz_{t-1}))]\cdot\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

On a également en combinant (2.2.10) et (2.2.11)

$$\begin{aligned}\frac{H_t^{(0)}(x,qy,z_1,\cdots,z_{t-1})-1}{(1-x)qy} - q^{2(t-1)}z_{t-1}^2\cdots z_1^2 H_t^{(0)}(qx,qy,qz_1,\cdots,qz_{t-1})) = \\ H_t^{(0)}(qx,qy,z_1,\cdots,z_{t-2},q^{\frac{1}{2}}z_{t-1}) \\ +q^2 z_{t-1}^2 H_t^{(0)}(qx,qy,z_1,\cdots,z_{t-3},q^{\frac{1}{2}}z_{t-2},qz_{t-1})) \\ +\cdots+q^{2(t-2)}z_{t-1}^2\cdots z_2^2 H_t^{(0)}(qx,qy,q^{\frac{1}{2}}z_1,qz_2,\cdots,qz_{t-1}))\cdot\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

On obtient donc en prenant $(z_1,\cdots,z_{t-1}) = (z,\cdots,z) = \mathbf{z}$ dans (2.2.13) et (2.2.14)

$$\begin{aligned}(1-\frac{1}{y})H_t^{(0)}(x,y,\mathbf{z}) - xH_t^{(0)}(x,qy,\mathbf{z}) + \frac{1}{y} = \\ -\frac{qz^2}{y}(H_t^{(0)}(x,qy,\mathbf{z})-1) + (1-x)q^{2t}z^{2t}H_t^{(0)}(qx,qy,q\mathbf{z})\end{aligned}$$

et donc

$$(y-1)H_t^{(0)}(x,y,\mathbf{z})+1-qz^2 = (xy-qz^2)H_t^{(0)}(x,qy,\mathbf{z})+(1-x)q^{2t}yz^{2t}H_t^{(0)}(qx,qy,q\mathbf{z}) \tag{2.2.15}$$

En prenant dans (2.2.15) qx,x,x au lieu de x,y,z, on obtient

$$(1-x)H_t^{(0)}(qx,x,\cdots,x) = 1-qx^2-(1-qx)q^{2t}x^{2t+1}H_t^{(0)}(q\cdot qx,qx,,\cdots,qx)\cdot$$

On en déduit par (2.2.5) la relation de récurrence souhaitée □

On remarque que les sommes manipulées dans la preuve sont finies pour $x = q^{-N}$, pour un $N > 0$. Il n'y a donc aucun souci de convergence. Le résultat clé de cette partie qui découle de cette proposition est le (2.2.4) qu'il convient de rappeler

$$J_N(T_{(2,2t+1)},\xi_N^{-1}) = F_t(\xi_N^{-1})\cdot$$

2.3 Lien entre $J_N(T^*_{(2t+1)}, q)$ et les U-fonctions

On commence par rappeler (1.3.6)

$$-q^{t-n}C_{n-1}(T^*_{(2,2t+1)}, q) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1-q^{2k}}{(q)_{n-k}(q)_{n+k}} q^{(t+1)k^2-k} \sum_{l=-k}^{k-1} (-1)^l q^{-\frac{2t+1}{2}l^2-\frac{2t-1}{2}l} .$$

L'idée dans cette partie est de poser

$$\alpha_n = (1-q^{2n})q^{(t+1)n^2-n} \sum_{l=-n}^{n-1} (-1)^l q^{-\frac{2t+1}{2}l^2-\frac{2t-1}{2}l}$$

et de voir

$$\beta_n = -q^{t-n}C_{n-1}(T^*_{(2,2t+1)}, q)$$

de sorte que (α_n, β_n) soit une paire de Bailey relative à 1. Cela reste cohérent en prenant par convention $C_{-1}(T^*_{(2,2t+1)}, q) = 0$. Le travail à effectuer est donc de trouver une expression pour β_n.

2.3.1 Opérations sur les paires de Bailey

Dans la première partie nous avons énoncé le lemme très important de Bailey qui permet d'obtenir à partir d'une paire de nouvelles paires. La première opération que nous mentionnerons est celle vue en (1.2.6) :

$$\alpha'_n = a^n q^{n^2} \alpha_n$$
$$\beta'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k q^{k^2} \beta_k}{(q)_{n-k}} \cdot$$

On notera cette opération T_∞. Appliquée m fois cela donne la paire

$$\alpha_n^{(m)} = a^{mn} q^{mn^2} \alpha_n \,,$$

$$\beta_n^{(m)} = \sum_{n=k_m \geq \cdots \geq k_1 \geq k_0 \geq 0} \frac{a^{k_0+\cdots+k_{m-1}} q^{k_0^2+\cdots+k_{m-1}^2} \beta_{k_0}}{(q)_{k_m-k_{m-1}}(q)_{k_m-k_{m-1}} \cdots (q)_{k_1-k_0}} \cdot \qquad (2.3.1)$$

La deuxième opération est assez particulière car elle permet de conserver le β_n à un cœfficient près.

Lemme 2.1 (opération T_z)**.** *Soit $(\alpha_n(z), \beta_n(z))$ la paire de Bailey relative à* 1*, avec $\alpha_0(z) = 1$ et*

$$\alpha_n(z) = (-1)^n z^{n^2} (z^n q^{-n} + z^{-n} q^n) \cdot$$

Alors $(\alpha'_n(z), \beta'_n(z))$ l'est également, où $\alpha'_0(z) = 1$,

$$\alpha'_n(z) = (-1)^n z^{n^2} (z^n + z^{-n})$$

et

$$\beta'_n(z) = q^n \beta_n(z) \cdot$$

Preuve. Commençons par donner une expression explicite de $\beta'_n(z)$ et $q^n\beta_n(z)$. On obtient

$$\beta'_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k}{(q)_{n-k}(q)_{n+k}} z^{k(k-1)}$$

et

$$q^n\beta_n(z) = q^n \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k q^k}{(q)_{n-k}(q)_{n+k}} z^{k(k-1)} .$$

En remarquant que $k(k-1) = (1-k)(1-k-1)$, on a

$$\beta'_n(z) = \frac{(-1)^n}{(q)_{2n}} z^{n(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(-1)^k}{(q)_{n-k}(q)_{n+k}} + \frac{(-1)^{1-k}}{(q)_{n+k-1}(q)_{n+1-k}} \right] z^{k(k-1)}$$

et

$$q^n\beta_n(z) = \frac{(-1)^n}{(q)_{2n}} z^{n(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(-1)^k q^{n+k}}{(q)_{n-k}(q)_{n+k}} + \frac{(-1)^{1-k} q^{n+1-k}}{(q)_{n+k-1}(q)_{n+1-k}} \right] z^{k(k-1)} .$$

Le résultat vient naturellement en observant que

$$\frac{1-q^{n+k}}{(q)_{n-k}(q)_{n+k}} = \frac{1}{(q)_{n-k}(q)_{n+k-1}} = \frac{1-q^{n+1-k}}{(q)_{n+k-1}(q)_{n+1-k}} .$$

□

Essayons de composer T_β et T_∞. On a $T_\infty \circ T_\beta(\alpha_0(z)) = T_\infty(1) = 1$ et

$$T_\infty \circ T_\beta(\alpha_n(z)) = T_\infty((-1)^n z^{n^2}(z^n + z^{-n})) = (-1)^n (qz)^{n^2}(z^n + z^{-n}) = \alpha_n(qz) ,$$

et

$$T_\infty \circ T_\beta(\beta_n(z)) = T_\infty(q^n\beta_n(z)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{q^k q^{k^2} \beta_k(z)}{(q)_{n-k}} .$$

On a également

$$T_\beta \circ T_\infty(\alpha'_n(z)) = \alpha'_n(qz)$$

et

$$T_\beta \circ T_\infty(\beta'_n(z)) = T_\beta\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{q^{k^2}\beta'_k(z)}{(q)_{n-k}} \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{q^n q^{k^2}\beta'_k(z)}{(q)_{n-k}} .$$

En répétant l'opération m fois, on obtient

$$\alpha_{m,n}(z) = \alpha'_n(q^m z)$$

et

$$\beta_{m,n}(z) = \sum_{n=k_m \geq \cdots \geq k_1 \geq k_0 \geq 0} \frac{q^{k_1+\cdots+k_m} q^{k_0^2+\cdots+k_{m-1}^2} \beta'_{k_0}(z)}{(q)_{k_m-k_{m-1}} \cdots (q)_{k_1-k_0}} . \tag{2.3.2}$$

Les opérations que nous avons vues jusque là conservent a la valeur relative à laquelle les paires de Bailey initiales sont liées. Dans l'opération qui suit, on passe de a à a/q.

Lemme 2.2 (Opération $T_{/q}$). *Soit (α_n, β_n) une paire de Bailey relative à $a \neq q^m$ pour tout entier $m \leq 0$. Alors (α'_n, β_n) est une paire de Bailey relative à a/q, avec $\alpha'_0 = \alpha_0$ et*

$$\alpha'_n = \frac{1-a}{1-aq^{2n}}\alpha_n - \frac{1-a}{1-aq^{2n-2}}aq^{2n-2}\alpha_{n-1} \cdot \tag{2.3.3}$$

Preuve. Pour $n \geq 1$, on a

$$\alpha'_n = \frac{1-a}{1-aq^{2n}}\alpha_n - \frac{1-a}{1-aq^{2n-2}}aq^{2n-2}\alpha_{n-1}$$

qui donne par le lemme d'inversion de Bailey

$$\alpha'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_{n+k}}{(q)_{n-k}}(-1)^{n-k}q^{\binom{n-k}{2}}\beta_k - aq^{2n-2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(a)_{n-1+k}}{(q)_{n-1-k}}(-1)^{n-1-k}q^{\binom{n-1-k}{2}}\beta_k$$

et donc

$$\alpha'_n = (a)_{2n}\beta_n - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(a)_{n-1+k}}{(q)_{n-k}}(-1)^{n-k}q^{\binom{n-k}{2}}\beta_k[(1-aq^{n+k-1})+a(1-q^{n-k})q^{n+k-1}]$$

d'où

$$\alpha'_n = (a)_{2n}\beta_n - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(a)_{n-1+k}}{(q)_{n-k}}(-1)^{n-k}q^{\binom{n-k}{2}}\beta_k[1-aq^{2n-1}] \cdot$$

On déduit donc que pour $n \geq 1$

$$\alpha'_n = (1-aq^{2n-1})\sum_{k=0}^{n}\frac{(a)_{n-1+k}}{(q)_{n-k}}(-1)^{n-k}q^{\binom{n-k}{2}}\beta_k$$

qui est bien une variante de formule d'inversion des paires de Bailey en remplaçant a par a/q. Le cas $n = 0$ étant également cohérent, on conclut donc que (α'_n, β_n) est une paire de Bailey relative à a/q. $\square$

On déduit naturellement l'opération inverse du lemme suivant:

Lemme 2.3 (Opération $T_{\times q}$). *Soit (α_n, β_n) une paire de Bailey relative à a. Alors (α'_n, β_n) est une paire de Bailey relative à aq, avec*

$$\alpha'_n = \frac{1-aq^{2n+1}}{1-aq}a^n q^{n^2}\sum_{k=0}^{n} a^{-k}q^{-k^2}\alpha_k \cdot \tag{2.3.4}$$

Preuve. Cela vient du lemme précédent en remarquant que

$$\alpha'_0 = \alpha_0$$

et pour $n \geq 1$

$$a^{-n}q^{-n^2}\alpha_n = \frac{1-aq}{a^n q^{n^2}(1-aq^{2n+1})}\alpha'_n - \frac{1-aq}{a^{n-1}q^{(n-1)^2}(1-aq^{2n-1})}\alpha'_{n-1}$$

qui donne
$$\alpha_n = \frac{1-aq}{1-aq^{2n+1}}\alpha'_n - \frac{1-aq}{1-aq^{2n-1}}(aq^{2n-1})\alpha'_{n-1}.$$
Ainsi, si (β'_n) la suite telle que (α'_n, β'_n) une paire de Bailey relative à aq, alors, par le lemme précédent, (α_n, β'_n) est une paire de Bailey relative à a. Par unicité des relations reliant les éléments d'une paire de Bailey, on a bien $\beta'_n = \beta_n$, d'où le résultat. □

Le dernier résultat présenté est le suivant: on suppose $\alpha_n(a, q)$ une suite de fonction et l'on considère $\beta_n(a, q)$ de sorte que $(\alpha_n(a, q), \beta_n(a, q))$ la paire de Bailey relative à a et aux q-séries. On suppose que les fonctions α_n et β_n sont définies en (a^{-1}, q^{-1}).

Lemme 2.4 (Opération T_{-1})**.** *(α_n, β_n) est une paire de Bailey relative à a, où*
$$\alpha_n = a^n q^{n^2} \alpha_n(a^{-1}, q^{-1})$$
et
$$\beta_n = a^{-n} q^{-n^2-n} \beta_n(a^{-1}, q^{-1}) \cdot \tag{2.3.5}$$

Preuve. On écrit tout d'abord
$$\beta_n(a^{-1}, q^{-1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_n(a^{-1}, q^{-1})}{(q^{-1}; q^{-1})_{n-k}(a^{-1}q^{-1}; q^{-1})_{n+k}} .$$
En remarquant que
$$(q^{-1}; q^{-1})_l = (-1)^l q^{-\frac{l(l+1)}{2}} (q)_l$$
et
$$(a^{-1}q^{-1}; q^{-1})_l = (-1)^l a^{-l} q^{-\frac{l(l+1)}{2}} (aq)_l \ ,$$
on obtient
$$(q^{-1}; q^{-1})_{n-k}(a^{-1}q^{-1}; q^{-1})_{n+k} = a^{-n-k} q^{-\frac{(n-k)(n-k+1)+(n+k)(n+k+1)}{2}} (q)_{n-k}(aq)_{n+k} \ ,$$
et donc
$$(q^{-1}; q^{-1})_{n-k}(a^{-1}q^{-1}; q^{-1})_{n+k} = a^{-n-k} q^{-n^2-n-k^2} (q)_{n-k}(aq)_{n+k}.$$
Le résultat s'en suit naturellement. □

2.3.2 De la paire de Bailey triviale à (α_n, β_n)

On rappelle ici que
$$\alpha_n = (1-q^{2n}) q^{(t+1)n^2-n} \sum_{l=-n}^{n-1} (-1)^l q^{-\frac{2t+1}{2}l^2 - \frac{2t-1}{2}l} .$$

On cherchera donc une expression explicite de β_n pour avoir une paire de Bailey relative à 1. On s'inspire ici de Lovejoy [12]. On pose dans la suite $\chi(X) = 0$ si X est faux et $\chi(X) = 1$ si X est vrai.

Proposition 2.2. *On a*

$$\beta_n = \sum_{n=k_{2t}\geq\cdots\geq k_0=0} \frac{q^{\sum_{i=1}^{t-1}k_{t+i}^2+\binom{k_t}{2}-\sum_{i=1}^{t-1}k_{i+1}k_i-\sum_{i=1}^{t-2}k_i}(-1)^{k_t}(1-q^{k_t-k_{t-1}})}{(q)_{k_{2t}-k_{2t-1}}\cdots(q)_{k_1-k_0}} \tag{2.3.6}$$

Ce résultat repose essentiellement sur 2 lemmes dont le premier est enoncé comme suit :

Lemme 2.5. *Pour tous entiers* $0\leq l\leq m$ *et* $p\geq 0$*, on a*

$$\alpha_n^{(l,m,p)} = \begin{cases} 1, & si\ n=0 \\ (-1)^n\left(q^{(p-m+\frac{1}{2})n^2+(l+\frac{1}{2})n}+q^{(p-m+\frac{1}{2})n^2-(l+\frac{1}{2})n}\right), & sinon \end{cases}$$

et

$$\beta_n^{(l,m,p)} = \sum_{n=k_{m+p}\geq\cdots\geq k_0=0} \frac{q^{\sum_{i=0}^{p-1}k_{m+i}^2-\sum_{i=1}^{m-1}k_{i+1}k_i-\sum_{i=1}^{l}k_i}(-1)^{k_m}q^{-\binom{k_m+1}{2}}}{(q)_{k_{m+p}-k_{m+p-1}}\cdots(q)_{k_1-k_0}} \tag{2.3.7}$$

forment une paire de Bailey relative à 1.

Preuve. On utilise ici comme paire de départ la paire triviale

$$\alpha_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n=0 \\ \dfrac{(1-aq^{2n})(aq)_{n-1}(-1)^nq^{\binom{n}{2}}}{(q)_n} & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\beta_n=\delta_{n,0}=\chi(n=0)$ qui est également définie pour $a=1$. Par passage à la limite en 1, on a bien

$$\alpha_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n=0 \\ \dfrac{(1-q^{2n})(-1)^nq^{\binom{n}{2}}}{1-q^n} = (1+q^n)(-1)^nq^{\binom{n}{2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\beta_n=\delta_{n,0}=\chi(n=0)$ la paire triviale de Bailey relative à 1. On remarque en écrivant

$$\alpha_n = (-1)^nq^{\frac{n^2}{2}}(q^{\frac{n}{2}}+q^{-\frac{n}{2}})\,,\ n\geq 1$$

que $\alpha_n=\alpha_n'(q^{\frac{1}{2}})$ dans le **lemme 2.1** et donc $\beta_n'(q^{\frac{1}{2}})=\chi(n=0)$. Ainsi d'après (2.3.2), en appliquant l fois l'opération $T_\beta\circ T_\infty$ on obtient la paire

$$\alpha_n = \alpha_n'(q^{l+\frac{1}{2}})$$

et

$$\beta_n = \sum_{n=k_l\geq\cdots\geq k_1\geq k_0\geq 0} \frac{q^{k_1+\cdots+k_l}q^{k_0^2+\cdots+k_{l-1}^2}\chi(k_0=0)}{(q)_{k_l-k_{l-1}}\cdots(q)_{k_1-k_0}}\,,$$

et donc la paire

$$\alpha_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ (-1)^n (q^{(l+\frac{1}{2})n^2+(l+\frac{1}{2})n} q^{(l+\frac{1}{2})n^2-(l+\frac{1}{2})n}), & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\beta_n = \sum_{n=k_l \geq \cdots \geq k_1 \geq k_0 = 0} \frac{q^{\sum_{i=1}^{l-1} k_i^2 + \sum_{i=1}^{l} k_i}}{(q)_{k_l - k_{l-1}} \cdots (q)_{k_1 - k_0}} \cdot \tag{2.3.8}$$

En appliquant ensuite $m - l$ fois T_∞ à cette paire, on obtient la nouvelle paire de Bailey

$$\alpha_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ (-1)^n (q^{(m+\frac{1}{2})n^2+(l+\frac{1}{2})n} + q^{(m+\frac{1}{2})n^2-(l+\frac{1}{2})n}), & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\beta_n = \sum_{n=k_m \geq \cdots \geq k_1 \geq k_0 = 0} \frac{q^{\sum_{i=1}^{m-1} k_i^2 + \sum_{i=1}^{l} k_i}}{(q)_{k_m - k_{m-1}} \cdots (q)_{k_1 - k_0}} \tag{2.3.9}$$

relative à 1. En reprenant l'égalité

$$(q^{-1}; q^{-1})_k = (-1)^k q^{-\frac{k^2+k}{2}} (q)_k \,,$$

on obtient en utilisant l'opérateur T_{-1} du **Lemme 2.4** la paire

$$\alpha_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ (-1)^n q^{n^2} (q^{(-m-\frac{1}{2})n^2-(l+\frac{1}{2})n} + q^{(-m-\frac{1}{2})n^2+(l+\frac{1}{2})n}), & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\beta_n = q^{-n^2-n} \sum_{n=k_m \geq \cdots \geq k_1 \geq k_0 = 0} (-1)^{\sum_{i=0}^{m-1} k_{i+1} - k_i} \frac{q^{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{(k_{i+1}-k_i)^2 + k_{i+1} - k_i}{2} - \sum_{i=1}^{m-1} k_i^2 - \sum_{i=1}^{l} k_i}}{(q)_{k_m - k_{m-1}} \cdots (q)_{k_1 - k_0}} \,. \tag{2.3.10}$$

qui donne après simplification

$$\alpha_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ (-1)^n (q^{(-m+\frac{1}{2})n^2-(l+\frac{1}{2})n} + q^{(-m+\frac{1}{2})n^2+(l+\frac{1}{2})n}), & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\beta_n = q^{-\frac{n^2+n}{2}} (-1)^n \sum_{n=k_m \geq \cdots \geq k_1 \geq k_0 = 0} \frac{q^{-\sum_{i=1}^{m-1} k_{i+1} k_i - \sum_{i=1}^{l} k_i}}{(q)_{k_m - k_{m-1}} \cdots (q)_{k_1 - k_0}} \cdot \tag{2.3.11}$$

En appliquant ensuite p fois T_∞, on obtient par (2.3.1) le résultat voulu. □

Le deuxième lemme est une version plus poussée du premier :

Lemme 2.6. *Pour tous entiers* $0 \leq l \leq m$, $p \geq 0$ *et* $0 \leq L \leq M$, *on a*

$$\begin{aligned} \alpha_n^{(l,m,p,L,M)} = {} & q^{(M+1)n^2 + Ln} \sum_{j=-n}^{n} (-1)^j q^{(p-m-\frac{1}{2})j^2 + (l+\frac{1}{2})j} \\ & - q^{(M+1)n^2 - Ln} \sum_{j=-n+1}^{n-1} (-1)^j q^{(p-m-\frac{1}{2})j^2 + (l+\frac{1}{2})j} \end{aligned}$$

et

$$\beta_n^{(l,m,p,L,M)} = \sum_{n=k_{m+p+M}\geq\cdots\geq k_0=0} \frac{q^{\sum_{i=0}^{p+M-1} k_{m+i}^2+\sum_{i=0}^{L-1} k_{m+p+i}-\sum_{i=1}^{m-1} k_{i+1}k_i-\sum_{i=1}^{l} k_i}(-1)^{k_m}q^{-\binom{k_m+1}{2}}}{(q)_{k_{m+p+M}-k_{m+p+M-1}}\cdots(q)_{k_1-k_0}} \tag{2.3.12}$$

forment une paire de Bailey relative à 1.

Preuve. On reprend la paire du lemme précédent à laquelle on applique l'opérateur $T_{\times q}$ du **Lemme 2.3**. On obtient donc la nouvelle paire de Bailey relative à q

$$\alpha_n = \frac{q^{n^2}(1-q^{2n+1})}{1-q}\sum_{j=-n}^{n}(-1)^j q^{(p-m-\frac{1}{2})j^2+(l+\frac{1}{2})j}$$

et

$$\beta_n = \sum_{n=k_{m+p}\geq\cdots\geq k_0=0} \frac{q^{\sum_{i=0}^{p-1} k_{m+i}^2-\sum_{i=1}^{m-1} k_{i+1}k_i-\sum_{i=1}^{l} k_i}(-1)^{k_m}q^{-\binom{k_m+1}{2}}}{(q)_{k_{m+p}-k_{m+p-1}}\cdots(q)_{k_1-k_0}}. \tag{2.3.13}$$

En y appliquant L fois l'opération T_∞, (ici $a=q$) on arrive donc à une nouvelle paire de Bailey relative à q avec

$$\alpha_n = \frac{q^{(L+1)n^2+Ln}(1-q^{2n+1})}{1-q}\sum_{j=-n}^{n}(-1)^j q^{(p-m-\frac{1}{2})j^2+(l+\frac{1}{2})j}$$

et

$$\beta_n = \sum_{n=k_{m+p}\geq\cdots\geq k_0=0} \frac{q^{\sum_{i=0}^{p+L-1} k_{m+i}^2+\sum_{i=0}^{L-1} k_{m+p+i}-\sum_{i=1}^{m-1} k_{i+1}k_i-\sum_{i=1}^{l} k_i}(-1)^{k_m}q^{-\binom{k_m+1}{2}}}{(q)_{k_{m+p+L}-k_{m+p+L-1}}\cdots(q)_{k_1-k_0}}. \tag{2.3.14}$$

On applique ensuite l'opérateur $T_{/q}$ du **Lemme 2.2** pour obtenir

$$\begin{aligned}\alpha_n &= q^{(L+1)n^2+Ln}\sum_{j=-n}^{n}(-1)^j q^{(p-m-\frac{1}{2})j^2+(l+\frac{1}{2})j}\\ &\quad -q^{(L+1)n^2-Ln}\sum_{j=-n+1}^{n-1}(-1)^j q^{(p-m-\frac{1}{2})j^2+(l+\frac{1}{2})j}\end{aligned}$$

et

$$\beta_n = \sum_{n=k_{m+p+L}\geq\cdots\geq k_0=0} \frac{q^{\sum_{i=0}^{p+L-1} k_{m+i}^2+\sum_{i=0}^{L-1} k_{m+p+i}-\sum_{i=1}^{m-1} k_{i+1}k_i-\sum_{i=1}^{l} k_i}(-1)^{k_m}q^{-\binom{k_m+1}{2}}}{(q)_{k_{m+p+L}-k_{m+p+L-1}}\cdots(q)_{k_1-k_0}} \tag{2.3.15}$$

qui forment une paire de Bailey relative à 1. Le résultat attendu dans le lemme est obtenu en y appliquant $M-L$ fois l'opérateur T_∞. □

Muni de ces 2 lemmes, nous pouvons démontrer sans difficulté la proposition.

Preuve de la proposition. On rappelle ici que

$$\alpha_n = (1-q^{2n})q^{(t+1)n^2-n}\sum_{l=-n}^{n-1}(-1)^l q^{-\frac{2t+1}{2}l^2-\frac{2t-1}{2}l},$$

et donc

$$\alpha_n = -q^{(t+1)n^2+n}\left[\sum_{l=-n}^{n-1}(-1)^l q^{-\frac{2t+1}{2}l^2-\frac{2t-1}{2}l}\right]+q^{(t+1)n^2-n}\left[\sum_{l=-n}^{n-1}(-1)^l q^{-\frac{2t+1}{2}l^2-\frac{2t-1}{2}l}\right].$$

On a donc

$$\begin{aligned}\alpha_n = & -q^{(t+1)n^2+n}\left[\sum_{l=-n}^{n}(-1)^l q^{-\frac{2t+1}{2}l^2-\frac{2t-1}{2}l}\right]+q^{(t+1)n^2-n}\left[\sum_{l=-n+1}^{n-1}(-1)^l q^{-\frac{2t+1}{2}l^2-\frac{2t-1}{2}l}\right] \\ & + \left\{\begin{array}{ll} 1, & \text{si } n=0 \\ (-1)^n\left[q^{\frac{1}{2}n^2-(t-\frac{3}{2})n}+q^{\frac{1}{2}n^2+(t-\frac{3}{2})n}\right], & \text{sinon}\end{array}\right. .\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

On pose donc naturellement

$$\alpha'_n = q^{(t+1)n^2+n}\left[\sum_{l=-n}^{n}(-1)^l q^{-\frac{2t+1}{2}l^2-\frac{2t-1}{2}l}\right]-q^{(t+1)n^2-n}\left[\sum_{l=-n+1}^{n-1}(-1)^l q^{-\frac{2t+1}{2}l^2-\frac{2t-1}{2}l}\right]$$

et

$$\alpha''_n = \left\{\begin{array}{ll} 1, & \text{si } n=0 \\ (-1)^n\left[q^{\frac{1}{2}n^2-(t-\frac{3}{2})n}+q^{\frac{1}{2}n^2+(t-\frac{3}{2})n}\right], & \text{sinon}\end{array}\right. .$$

En utilisant le **Lemme 2.6** pour l, m, p, L, M valant respectivement $t-1, t, 0, 1, t$, on obtient

$$\beta'_n = \sum_{n=k_{2t}\geq\cdots\geq k_0=0}\frac{q^{\sum_{i=0}^{t-1}k_{t+i}^2-\sum_{i=1}^{t-1}k_{i+1}k_i-\sum_{i=1}^{t-1}k_i}(-1)^{k_t}q^{-\binom{k_t+1}{2}+k_t}}{(q)_{k_{2t}-k_{2t-1}}\cdots(q)_{k_1-k_0}}.$$

On a à partir du **Lemme 2.5** pour l, m, p valant respectivement $(t-2)\chi(t \geq 2), t, t$

$$\beta''_n = \sum_{n=k_{2t}\geq\cdots\geq k_0=0}\frac{q^{\sum_{i=0}^{t-1}k_{t+i}^2-\sum_{i=1}^{t-1}k_{i+1}k_i-\sum_{i=1}^{t-2}k_i}(-1)^{k_t}q^{-\binom{k_t+1}{2}}}{(q)_{k_{2t}-k_{2t-1}}\cdots(q)_{k_1-k_0}}.$$

Comme $\alpha_n = \alpha''_n - \alpha'_n$ et $k_0 = 0$, on a donc

$$\beta_n = \sum_{n=k_{2t}\geq\cdots\geq k_0=0}\frac{q^{\sum_{i=0}^{t-1}k_{t+i}^2-\sum_{i=1}^{t-1}k_{i+1}k_i-\sum_{i=1}^{t-2}k_i}(-1)^{k_t}q^{-\binom{k_t+1}{2}}[1-q^{k_t-k_{t-1}}]}{(q)_{k_{2t}-k_{2t-1}}\cdots(q)_{k_1-k_0}}.$$

On conclut en remarquant que $n-\binom{n+1}{2}=\binom{n}{2}$. □

Nous allons maintenant relier la dernière expression de β_n aux U-fonctions.

2.3.3 Identité q-binomiale et dérivé

On rappelle ici la variante de l'identité q-binomiale énoncée en (1.1.5)

$$\sum_{n=a}^{b} \frac{q^{\binom{n}{2}}(-z)^n}{(q)_{b-n}(q)_{n-a}} = (-z)^a q^{\binom{a}{2}} \frac{(zq^a)_{b-a}}{(q)_{b-a}}$$

pour tous entiers $0 \leq a \leq b$. Il s'agit d'un polynôme en z et donc défini pour toute valeur complexe z. En particulier, si $z = q^k$, on a

$$\sum_{n=a}^{b} \frac{q^{\binom{n}{2}}(-1)^n q^{nk}}{(q)_{b-n}(q)_{n-a}} = (-1)^a q^{ak} q^{\binom{a}{2}} \frac{(q^{a+k})_{b-a}}{(q)_{b-a}} = (-1)^a q^{ak} q^{\binom{a}{2}} \begin{bmatrix} b+k-1 \\ b-a \end{bmatrix}. \tag{2.3.17}$$

On a donc pour tout entier c

$$\begin{aligned} \sum_{n=a}^{b} \frac{q^{\binom{n}{2}}(-1)^n(1-q^{n-c})q^{-an}}{(q)_{b-n}(q)_{n-a}} &= \sum_{n=a}^{b} \frac{q^{\binom{n}{2}}(-1)^n(q^{-an}-q^{(1-a)n-c})}{(q)_{b-n}(q)_{n-a}} \\ &= \begin{cases} (-1)^a q^{\binom{a}{2}-a^2}(1-q^{a-c}) & \text{si } a=b \\ (-1)^{a+1} q^{-\binom{a}{2}-c} & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

On a donc $c = a$ une somme qui s'annule dès que $b = a$. Ces différents outils vont nous permettre de une expression polynomiale de β_n.

Proposition 2.3. *On a*

$$\beta_n = -\sum_{n=n_t \geq \cdots \geq n_1 \geq 1} \prod_{i=1}^{t-1} \begin{bmatrix} n_{i+1} - n_i - i + 2\sum_{j=1}^{i} n_j \\ n_{i+1} - n_i \end{bmatrix}. \tag{2.3.19}$$

Preuve de la proposition. Dans la formule (2.3.6)

$$\beta_n = \sum_{n=k_{2t} \geq \cdots \geq k_0 = 0} \frac{q^{\sum_{i=1}^{t-1} k_{t+i}^2 + \binom{k_t}{2} - \sum_{i=1}^{t-1} k_{i+1}k_i - \sum_{i=1}^{t-2} k_i}(-1)^{k_t}(1-q^{k_t-k_{t-1}})}{(q)_{k_{2t}-k_{2t-1}} \cdots (q)_{k_1-k_0}},$$

on pose $n_i = k_{t+i} - k_{t-i}$ pour tout $1 \leq i \leq t$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \beta_n = \sum_{\substack{n = k_0 + n_t \geq \cdots \geq k_{t-1} + n_1 \\ \geq k_{t-1} \geq \cdots \geq k_0 = 0}} & \frac{q^{\sum_{i=1}^{t-1} n_i^2 + 2n_i k_{t-i} + k_{t-i}^2 - \sum_{i=2}^{t-1} k_{t-i+1}k_{t-i} - \sum_{i=2}^{t-1} k_{t-i}}}{\prod_{i=1}^{t-1} (q)_{k_{t-i}-k_{t-i-1}} (q)_{k_{t-i-1}-k_{t-i}+n_{i+1}-n_i}} \\ & \times \sum_{k_t=k_{t-1}}^{k_{t-1}+n_1} \frac{(-1)^{k_t} q^{\binom{k_t}{2} - k_t k_{t-1}}(1-q^{k_t-k_{t-1}})}{(q)_{k_{t-1}+n_1-k_t}(q)_{k_t-k_{t-1}}}. \end{aligned}$$

D'après (2.3.18) pour $c = a, b$ valant $k_{t-1}, k_{t-1}+n_1$, on a la sous-somme nulle dès que $n_1 = 0$. On a prend donc la somme pour $n_1 \geq 1$ et on obtient

$$\beta_n = -\sum_{\substack{n = k_0 + n_t \geq \\ \cdots \\ \geq k_{t-1} + n_1 > k_{t-1} \geq \\ \cdots \\ \geq k_0 = 0}} \frac{q^{\sum_{i=1}^{t-1} n_i^2 + 2n_i k_{t-i} + k_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^{t-1} k_{t-i}k_{t-i-1} - \sum_{i=1}^{t-1} k_{t-i}}(-1)^{k_{t-1}} q^{-\binom{k_{t-1}}{2}}}{\prod_{i=1}^{t-1} (q)_{k_{t-i}-k_{t-i-1}} (q)_{k_{t-i-1}-k_{t-i}+n_{i+1}-n_i}}.$$

On réécrit ensuite

$$\begin{aligned}\beta_n = -\sum_{n=n_t\geq\cdots\geq n_1\geq 1} q^{n_1^2+\cdots+n_{t-1}^2} &\sum_{k_1=k_0=0}^{n_t-n_{t-1}+k_0} \frac{q^{k_1^2+(2n_{t-1}-1-k_0)k_1}}{(q)_{k_1-k_0}(q)_{k_0+n_t-n_{t-1}-k_1}} \\ \times\cdots\times &\sum_{k_{t-j}=k_{t-j-1}}^{n_{j+1}-n_j+k_{t-j-1}} \frac{q^{k_{t-j}^2+(2n_j-1-k_{t-j-1})k_{t-j}}}{(q)_{k_{t-j}-k_{t-j-1}}(q)_{k_{t-j-1}+n_{j+1}-n_j-k_{t-j}}} \\ \times\cdots\times &\sum_{k_{t-1}=k_{t-2}}^{n_2-n_1+k_{t-2}} \frac{(-1)^{k_{t-1}}q^{\binom{k_{t-1}}{2}+k_{t-1}(2n_1-k_{t-2})}}{(q)_{k_{t-1}-k_{t-2}}(q)_{n_2-n_1+k_{t-2}-k_{t-1}}}\,.\end{aligned}$$

Il s'en suit par réccurence en utilisant (2.3.17) que

$$\begin{aligned}\beta_n = -\sum_{n=n_t\geq\cdots\geq n_1\geq 1} q^{n_1^2+\cdots+n_{t-1}^2} &\sum_{k_1=k_0=0}^{n_t-n_{t-1}+k_0} \frac{q^{k_1^2+(2n_{t-1}-1-k_0)k_1}}{(q)_{k_1-k_0}(q)_{k_0+n_t-n_{t-1}-k_1}} \\ \times\cdots\times &\sum_{k_{t-j}=k_{t-j-1}}^{n_{j+1}-n_j+k_{t-j-1}} \frac{(-1)^{k_{t-j}}q^{\binom{k_{t-j}}{2}+(2[\sum_{i=1}^{j} n_i]-j+1-k_{t-j-1})k_{t-j}}}{(q)_{k_{t-j}-k_{t-j-1}}(q)_{k_{t-j-1}+n_{j+1}-n_j-k_{t-j}}} \\ &\times\prod_{i=1}^{j-1}\begin{bmatrix} n_{i+1}-n_i-i+2\sum_{j=1}^{i} n_j \\ n_{i+1}-n_i\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

On arrive donc à

$$\begin{aligned}\beta_n = -\sum_{n=n_t\geq\cdots\geq n_1\geq 1} q^{n_1^2+\cdots+n_{t-1}^2}(-1)^{k_0}q^{(2[\sum_{i=1}^{t-1} n_i]-t+2-k_0)k_0+\binom{k_0}{2}}\times \\ \prod_{i=1}^{t-1}\begin{bmatrix} n_{i+1}-n_i-i+2\sum_{j=1}^{i} n_j \\ n_{i+1}-n_i\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Mais $k_0 = 0$, d'où la proposition. $\square$

2.3.4 Preuve du Théorème 2.2

Comme $\beta_n = -q^{t-n}C_{n-1}(T^*_{(2,2t+1)}, q)$, on déduit de la proposition précédente que

$$C_n(T^*_{(2,2t+1)}, q) = q^{n+1-t}\sum_{n+1=n_t\geq\cdots\geq n_1\geq 1}\prod_{i=1}^{t-1} q^{n_i^2}\begin{bmatrix} n_{i+1}-n_i-i+2\sum_{j=1}^{i} n_j \\ n_{i+1}-n_i\end{bmatrix}. \tag{2.3.20}$$

En reprenant l'expansion cyclotomique (1.3.4)

$$J_N(T^*_{(2,2t+1)}, q) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(T^*_{(2,2t+1)}, q)(q^{1-N})_n(q^{1+N})_n\,,$$

on obtient

$$J_N(T^*_{(2,2t+1)},q) = q^{-t} \sum_{n_t \geq \cdots \geq n_1 \geq 1} (q^{1-N})_{n_t-1}(q^{1+N})_{n_t-1} q^{n_t}$$
$$\times \prod_{i=1}^{t-1} q^{n_i^2} \begin{bmatrix} n_{i+1} - n_i - i + 2\sum_{j=1}^{i} n_j \\ n_{i+1} - n_i \end{bmatrix}$$

et donc

$$J_N(T^*_{(2,2t+1)},q) = U_t(-q^N, q) \tag{2.3.21}$$

qui est polynomiale en q, q^{-1}. En particulier, pour $q = \xi_N$, on a

$$J_N(T^*_{(2,2t+1)},\xi_N) = U_t(-1,\xi_N)\cdot \tag{2.3.22}$$

En couplant ce résultat avec (2.2.4) qui dit que

$$J_N(T_{(2,2t+1)},\xi_N^{-1}) = F_t(\xi_N^{-1}),$$

on a le **Théorème2.2** :

$$F_t(\xi_N^{-1}) = U_t(-1,\xi_N)\cdot$$

Nous avons montré que les nœuds toriques $T_{(2,2t+1)}$ donnent des polynômes de Jones qui ont un lien étroit avec les formes modulaires F_t. Que se passe t-il quand on prend une autre famille de tores $T_{(s,t)}$ avec $s, t > 2$? Nous discuterons de cette question, dans la section qui suit, en particulier pour le cas des nœuds toriques $T_{(3,2^t)}$ pour $t \geq 2$.

3 *Polynômes de Jones N-colorés des nœuds toriques $T_{(3,2^t)}$*

3.1 Retour sur l'équation N-différentielle des $J_N(T_{(s,t)}, q)$

On rappelle ici l'expression explicite des polynômes N-colorés de Jones

$$J_N(T_{(s,t)}, q) = \frac{q^{\frac{1}{4}st(1-N^2)}}{q^{\frac{N}{2}} - q^{-\frac{N}{2}}} \sum_{j=\frac{1-N}{2}}^{\frac{N-1}{2}} q^{stj^2} \left(q^{-(s+t)j+\frac{1}{2}} - q^{-(s-t)j-\frac{1}{2}} \right) .$$

On remarque que l'ensemble de sommation est même pour 2 entiers consécutifs aux extrémités près. On obtient donc

$$\begin{aligned} J_N(T_{(s,t)}, q) = \frac{q^{\frac{1}{4}st(1-N^2)}}{q^{\frac{N}{2}} - q^{-\frac{N}{2}}} &\left[q^{st\frac{(N-1)^2}{4}+(s+t)\frac{N-1}{2}+\frac{1}{2}} - q^{st\frac{(N-1)^2}{4}+(s-t)\frac{N-1}{2}-\frac{1}{2}} \right. \\ &\left. + \, q^{st\frac{(N-1)^2}{4}-(s+t)\frac{N-1}{2}+\frac{1}{2}} - q^{st\frac{(N-1)^2}{4}-(s-t)\frac{N-1}{2}-\frac{1}{2}} \right] \\ &+ \frac{q^{\frac{N-2}{2}} - q^{-\frac{N-2}{2}}}{q^{\frac{N}{2}} - q^{-\frac{N}{2}}} q^{\frac{1}{4}st((N-2)^2-N^2)} J_{N-2}(T_{(s,t)}, q) \cdot \end{aligned}$$

Après simplification on obtient

$$\begin{aligned} J_N(T_{(s,t)}, q) = \frac{q^{\frac{1}{2}(s-1)(t-1)(1-N)}}{1-q^{-N}} &\left[1 - q^{s(1-N)-1} - q^{t(1-N)-1} + q^{(s+t)(1-N)} \right] \\ &+ \frac{1-q^{2-N}}{1-q^{-N}} q^{st(1-N)-1} J_{N-2}(T_{(s,t)}, q) \cdot \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

En posant

$$J_N(T_{(s,t)}, q) = \frac{q^{\frac{1}{2}(s-1)(t-1)(1-N)}}{1-q^{-N}} K_N(T_{(s,t)}, q) \,,$$

on obtient

$$K_N(T_{(s,t)}, q) = 1 - q^{s(1-N)-1} - q^{t(1-N)-1} + q^{(s+t)(1-N)} + q^{st(2-N)-s-t} K_{N-2}(T_{(s,t)}, q) \cdot \tag{3.1.2}$$

3.2 Polynôme de Jones pour $T_{(3,4)}$

Pour $T_{(3,4)}$, l'équation différentielle donne

$$K_N(T_{(3,4)}, q) = 1 - q^{3(1-N)-1} - q^{4(1-N)-1} + q^{7(1-N)} + q^{12(2-N)-7} K_{N-2}(T_{(3,4)}, q) \cdot$$

De cette dernière relation on obtient une expression modulaire de $K_N(T_{(3,4)}, q)$.

Théorème 3.1 (Hikami et Kirillov [10]). *On a*

$$K_N(T_{(3,4)},q)=\sum_{n\geq 0}(q^{-N})_{n+1}\cdot q^{-2nN}\sum_{k\geq 0}q^{-2kN+2k(k+1)} \times\left(q^N\begin{bmatrix} n \\ 2k+1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n+1 \\ 2k+1\end{bmatrix}\right)\cdot \tag{3.2.1}$$

Preuve du théorème. On pose la fonction

$$H_1(x)=\sum_{n\geq 0}(x)_{n+1}x^{2n}\sum_{k\geq 0}x^{2k}q^{2k(k+1)}\left(x^{-1}\begin{bmatrix} n \\ 2k+1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n+1 \\ 2k+1\end{bmatrix}\right)\cdot \tag{3.2.2}$$

On remarque que le théorème est vrai si et seulement si $K_N(T_{(3,4)},q)=H_1(q^{-N})$. On va donc montrer naturellement que

$$H_1(x)=1-q^2x^3-q^3x^4+q^7x^7+q^{17}x^{12}H(q^2x)\cdot \tag{3.2.3}$$

Pour cela, on introduit la fonction

$$H(x)=\sum_{n\geq 0}(x;q^{\frac{1}{2}})_{n+1}x^n\cdot$$

On a donc

$$H(x)=\sum_{n\geq 0}(x;q^{\frac{1}{2}})_{2n+1}x^{2n}+\sum_{n\geq 0}(x;q^{\frac{1}{2}})_{2n+2}x^{2n+1}$$

$$\Rightarrow H(x)=\sum_{n\geq 0}(x)_{n+1}(xq^{\frac{1}{2}})_n x^{2n}+\sum_{n\geq 0}(x)_{n+1}(xq^{\frac{1}{2}})_{n+1}x^{2n+1}\cdot$$

En utilisant l'identité q-binomiale on obtient

$$(q^{\frac{1}{2}}x)_m=\sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix} m \\ k\end{bmatrix}(-1)^k q^{\binom{k}{2}+\frac{k}{2}}x^k=\sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix} m \\ k\end{bmatrix}(-1)^k q^{\frac{k^2}{2}}x^k$$

et donc

$$(q^{\frac{1}{2}}x)_m=\sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix} m \\ 2k\end{bmatrix}q^{2k^2}x^{2k}-q^{\frac{1}{2}}\sum_{k\geq 0}\begin{bmatrix} m \\ 2k+1\end{bmatrix}q^{2k(k+1)}x^{2k+1}\cdot$$

On a ainsi

$$H(x)=\sum_{n\geq 0}(x)_{n+1}x^{2n}\sum_{k\geq 0}\left(\begin{bmatrix} n \\ 2k\end{bmatrix}+x\begin{bmatrix} n+1 \\ 2k\end{bmatrix}\right)q^{2k^2}x^{2k} -q^{\frac{1}{2}}\sum_{n\geq 0}(x)_{n+1}x^{2n}\sum_{k\geq 0}\left(\begin{bmatrix} n \\ 2k+1\end{bmatrix}+x\begin{bmatrix} n+1 \\ 2k+1\end{bmatrix}\right)q^{2k(k+1)}x^{2k+1}\cdot \tag{3.2.4}$$

On pose donc naturellement la fonction

$$H_0(x) = \sum_{n\geq 0}(x)_{n+1}x^{2n}\sum_{k\geq 0}\left(\left[\begin{array}{c} n \\ 2k \end{array}\right] + x\left[\begin{array}{c} n+1 \\ 2k \end{array}\right]\right)q^{2k^2}x^{2k}$$

et on a

$$H(x) = H_0(x) - q^{\frac{1}{2}}x^2H_1(x)\cdot \tag{3.2.5}$$

Notons que par définition des séries, on a $H \in \mathbb{Z}[[q^{\frac{1}{2}};x]]$ et $H_0, H_1 \in \mathbb{Z}[[q;x]]$. H_0 et H_1 sont donc déterminés de manière unique par H.
Ici on utilise une preuve différente de celle donnée par Hikami. On va chercher une équation différentielle de H. On a

$$H(qx) = \sum_{n\geq 0}(qx;q^{\frac{1}{2}})_{n+1}q^nx^n = q^{-\frac{7}{2}}x^{-2}\sum_{n\geq 0}(qx;q^{\frac{1}{2}})_{n+1}q^{n+\frac{7}{2}}x^2x^n$$

$$\Rightarrow\ q^{\frac{7}{2}}x^6H(qx) = \sum_{n\geq 0}(qx;q^{\frac{1}{2}})_{n+1}[(1-q^{\frac{n}{2}+\frac{3}{2}}x)(1-q^{\frac{n}{2}+\frac{3}{2}}x)-(1+q^{\frac{1}{2}})(1-q^{\frac{n}{2}+\frac{3}{2}}x)+q^{\frac{1}{2}}]x^{n+4}$$

$$\Rightarrow\ q^{\frac{7}{2}}x^6H(qx) = \sum_{n\geq 0}[(qx;q^{\frac{1}{2}})_{n+3} - (1+q^{\frac{1}{2}})(qx;q^{\frac{1}{2}})_{n+2} + q^{\frac{1}{2}}(qx;q^{\frac{1}{2}})_{n+1}]x^{n+4}\cdot$$

On a également

$$\sum_{n\geq 0}q^{\frac{1}{2}}(qx;q^{\frac{1}{2}})_{n+1}x^{n+4} = \sum_{n\geq 0}(qx;q^{\frac{1}{2}})_{n+1}[(1-x)(1-q^{\frac{1}{2}}x) + (1+q^{\frac{1}{2}})x - 1]x^{n+2}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} q^{\frac{7}{2}}x^6H(qx) = {} & \sum_{n\geq 0}(qx;q^{\frac{1}{2}})_{n+3}x^{n+4} - (1+q^{\frac{1}{2}})\sum_{n\geq 0}(qx;q^{\frac{1}{2}})_{n+2}x^{n+4} \\ & +(1+q^{\frac{1}{2}})\sum_{n\geq 0}(qx;q^{\frac{1}{2}})_{n+1}x^{n+3} - \sum_{n\geq 0}(qx;q^{\frac{1}{2}})_{n+1}x^{n+2} + \sum_{n\geq 0}(x;q^{\frac{1}{2}})_{n+3}x^{n+2} \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} q^{\frac{7}{2}}x^6H(qx) = {} & -(qx;q^{\frac{1}{2}})_1x^2 - (qx;q^{\frac{1}{2}})_2x^3 + (1+q^{\frac{1}{2}})(qx;q^{\frac{1}{2}})_1x^3 \\ & -(x;q^{\frac{1}{2}})_1 - (x;q^{\frac{1}{2}})_2x + H(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ q^{\frac{7}{2}}x^6H(qx) = {} & -(1-qx)x^2 - (1-qx)(1-q^{\frac{3}{2}}x)x^3 + (1+q^{\frac{1}{2}})(1-qx)x^3 \\ & -(1-x) - (1-x)(1-q^{\frac{1}{2}}x)x + H(x)\,, \end{aligned}$$

et après simplification on a l'équation différentielle

$$H(x) = 1 - q^{\frac{1}{2}}x^2 - qx^3 + q^{\frac{5}{2}}x^5 + q^{\frac{7}{2}}x^6H(qx)\cdot \tag{3.2.6}$$

En reprenant (3.2.5), on obtient le système

$$\begin{cases} H_0(x) = 1 - qx^3 - q^6x^8 H_1(qx) \\ H_1(x) = 1 - q^2x^3 - q^3x^4 H_0(qx) \end{cases} \cdot \tag{3.2.7}$$

En composant une nouvelle fois on obtient

$$\begin{cases} H_0(x) = 1 - qx^3 - q^6x^8 + q^{11}x^{11} + q^{13}x^{12} H_0(q^2x) \\ H_1(x) = 1 - q^2x^3 - q^3x^4 + q^7x^7 + q^{17}x^{12} H_1(q^2x) \end{cases} \cdot$$

On a donc l'équation différentielle de H_1

$$H_1(x) = 1 - q^2x^3 - q^3x^4 + q^7x^7 + q^{17}x^{12} H_1(q^2x) \cdot \tag{3.2.8}$$

On conclut simplement en remarquant que

$$J_1(T_{(3,4)}, q) = 1$$

et en posant $J_0(T_{(3,4)}, q) = 0$, on a

$$K_1(T_{(3,4)}, q) = 1 - q^{-1}$$

et par convention on prend $K_0(T_{(3,4)}, q) = 0$. On a vérifie que

$$K_0(T_{(3,4)}, q) = H_1(1)$$

et

$$K_1(T_{(3,4)}, q) = H_1(q^{-1}) \cdot$$

De plus, les suites $(K_N(T_{(3,4)}, q))_{N\geq 0}$ et $(H_1(q^{-N}))_{N\geq 0}$ ont les mêmes relations de récurrence de second ordre. On en déduit donc que les 2 suites sont les mêmes, d'où le résultat. □

Le théorème précédent nous donne une expression explicite des polynômes N-colorés de Jones avec

$$J_N(T_{(3,4)}, q) = q^{3(1-N)} \sum_{n\geq 0} (q^{1-N})_n \cdot q^{-2nN} \sum_{k\geq 0} q^{-2kN+2k(k+1)} \times \left(q^N \begin{bmatrix} n \\ 2k+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+1 \\ 2k+1 \end{bmatrix} \right) \cdot \tag{3.2.9}$$

3.3 À la recherche d'une formule générale pour $T_{(3,2^t)}$

La logique suivie de la relation différentielle de K_N suggère que l'on devrait chercher une fonction $x \mapsto H_{(s,t)}(x)$, pour laquelle

$$K_N(T_{(s,t)}, q) = H_{(s,t)}(q^{-N}) \tag{3.3.1}$$

et qui vérifirait la relation

$$H_{(s,t)}(x) = 1 - q^{s-1}x^s - q^{t-1}x^t + q^{s+t}x^{s+t} + q^{2st-s-t}x^{st}H_{(s,t)}(q^2x)\cdot \quad (3.3.2)$$

On pourrait pour cela regarder une fonction analogue à celles étudier jusque là:

$$H(x,q) = \sum_{n\geq 0}(x;q)_{n+1}x^n \quad (3.3.3)$$

3.3.1 Relations différentielles de H

On a:

$$H(qx,q) = \sum_{n\geq 0}(qx;q)_{n+1}q^nx^n = x^{-1}q^{-2}\sum_{n\geq 0}(qx;q)_{n+1}[(q^{n+2}x-1)+1]x^n$$

$$\Rightarrow xq^2H(qx,q) = -\sum_{n\geq 0}(qx;q)_{n+2}x^n + \sum_{n\geq 0}(qx;q)_{n+1}x^n$$

$$\Rightarrow xq^2H(qx,q) = -\sum_{n\geq 0}(qx;q)_{n+2}x^n + x^{-1}\sum_{n\geq 0}[(x-1)+1](qx;q)_{n+1}x^n$$

$$\Rightarrow q^2x^3H(qx,q) = -\sum_{n\geq 0}(qx;q)_{n+2}x^{n+2} + \sum_{n\geq 0}(qx;q)_{n+1}x^{n+1} - \sum_{n\geq 0}(x;q)_{n+2}x^{n+1}\cdot$$

On obtient donc

$$H(x,q) = (1-x) + (1-qx)x - q^2x^3H(qx,q)$$

d'où l'équation différentielle de premier ordre

$$H(x,q) = 1 - qx^2 - q^2x^3H(qx,q)\cdot \quad (3.3.4)$$

On peut aller plus loin en cherchant l'équation différentielle d'ordre n. En remarquant que

$$H(q^kx,q) = 1 - q^{1+2k}x^2 - q^{2+3k}x^3H(q^{k+1}x,q)\,,$$

on obtient facilement par réccurence que

$$H(x,q) = \left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kq^{2k+3\binom{k}{2}}x^{3k}(1-q^{1+2k}x^2)\right] + (-1)^nq^{2n+3\binom{n}{2}}x^{3n}H(q^nx,q)\,, \quad (3.3.5)$$

ou encore

$$H(x,q) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kq^{\frac{k(3k+1)}{2}}x^{3k} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kq^{\frac{(k+1)(3k+2)}{2}}x^{3k+2} + (-1)^nq^{\frac{n(3n+1)}{2}}x^{3n}H(q^nx,q)\cdot \quad (3.3.6)$$

On peut remarquer que dans la partie précédente, $H(x) = H(x,q^{\frac{1}{2}})$, et l'on retrouve son équation différentielle (3.2.6). Une piste serait donc de regarder les fonctions pour $m > 1$

$$H_m:\ x \mapsto H_m(x) = H(x,q^{\frac{1}{m}})\ \cdot$$

3.3.2 Autour des fonctions H_m

Il est facile d'observer que $H_m(x) \in \mathbb{Z}[[q^{\frac{1}{m}};x]]$. On peut donc l'écrire de manière unique

$$H_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} q^{\frac{k}{m}} H_{m,k}(x)$$

où les $H_{m,k}$ sont dans $\mathbb{Z}[[q;x]]$. On va déterminer des expressions explicites des $H_{m,k}$. On a ainsi

$$H_m(x) = \sum_{n\geq 0}(x;q^{\frac{1}{m}}) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{n\geq 0} x^{mn+k} \prod_{l=0}^{m-1} (q^{\frac{l}{m}}x)_{n+\chi(l\leq k)} \cdot$$

En utilisant l'identité q-binomiale, on a

$$(q^{\frac{l}{m}}x)_{n+\chi(l\leq k)} = \sum_{j\geq 0}(-1)^j x^j q^{\frac{jl}{m}+\frac{j(j-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+\chi(l\leq k) \\ j \end{bmatrix}$$

et par la suite

$$\prod_{l=1}^{m-1} (q^{\frac{l}{m}}x)_{n+\chi(l\leq k)} = \sum_{j_{m-1},\cdots,j_1\geq 0} \prod_{l=1}^{m-1} (-x)^{j_l} q^{\frac{j_l l}{m}+\frac{j_l(j_l-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+\chi(l\leq k) \\ j_l \end{bmatrix}.$$

On arrive donc à

$$H_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{n\geq 0}\sum_{j_{m-1},\cdots,j_1\geq 0} (x)_{n+1}x^{mn+k} \prod_{l=1}^{m-1} (-x)^{j_l} q^{\frac{j_l l}{m}+\frac{j_l(j_l-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+\chi(l\leq k) \\ j_l \end{bmatrix}.$$

Comme la partie fractionnaire des puissances des termes est déterminée par $\sum_{l=1}^{m-1} j_l l \mod m$, on obtient donc

$$H_{m,a}(x) = \sum_{n\geq 0}(x)_{n+1}x^{mn} \sum_{\sum_{l=1}^{m-1} j_l l\equiv a[m]} (-x)^{\sum_{l=1}^{m-1} j_l} q^{\frac{-2a+\sum_{l=1}^{m-1} j_l(mj_l-m+2l)}{2m}} \times \sum_{k=0}^{m-1} x^k \prod_{l=1}^{m-1} \begin{bmatrix} n+\chi(l\leq k) \\ j_l \end{bmatrix}. \tag{3.3.7}$$

3.3.3 À la recherche de $H_{(3,2^t)}$

En prenant dans (3.3.6) $q^{\frac{1}{m}}$ au lieu de q, on obtient

$$H_m(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k q^{\frac{k(3k+1)}{2m}} x^{3k} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k q^{\frac{(k+1)(3k+2)}{2m}} x^{3k+2} + (-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{2m}} x^{3n} H_m(q^{\frac{n}{m}}x) \cdot \tag{3.3.8}$$

On regarde les entiers $\frac{k(3k+1)}{2}$ et $\frac{(3k+2)(k+1)}{2}$, et on en distingue $2n$ sur les 2 premières sommes (au moins n distincts). On a également

$$\frac{k(3k+1)}{2} \equiv \frac{k'(3k'+1)}{2} \mod m \Leftrightarrow (k-k')[3(k+k')+1] \equiv 0 \mod 2m \cdot$$

Pour $2m = 2^t$, les deux facteurs étant de différentes parités, on obtient en prenant $3\alpha \equiv 1 \mod 2^t$(ici $\alpha \equiv 1 + \sum_{i=0}^{\lfloor t/2 \rfloor -1} 2^{2i+1} \mod 2^t$)

$$(k-k')[3(k+k')+1] \equiv 0 \mod 2^t \Leftrightarrow \begin{cases} k \equiv k' \mod 2^t \text{ ou} \\ k' \equiv -k-\alpha \mod 2^t \end{cases} .$$

Vu que α est impair, on a donc 2^{t-1} congruences distinctes pour les entiers $\frac{k(3k+1)}{2}$ modulo 2^{t-1} pour $n = 2^t$, chacune d'elle étant atteinte exactement 2 fois. Il en est de même pour les entiers $\frac{(3k+2)(k+1)}{2}$. On a donc

$$H_{2^{t-1}}(x) = \sum_{k=0}^{2^t-1} (-1)^k q^{\frac{k(3k+1)}{2^t}} x^{3k} - \sum_{k=0}^{2^t-1} (-1)^k q^{\frac{(k+1)(3k+2)}{2^t}} x^{3k+2} + q^{3\cdot 2^t+1} x^{3\cdot 2^t} H_{2^{t-1}}(q^2 x) \cdot$$

En posant pour tout $0 \leq a \leq 2^{t-1} - 1$ les entiers $0 \leq k_0(a) < k_1(a); k_2(a) < k_3(a) \leq 2^t - 1$ de sorte que

$$\frac{k_0(a)(3k_0(a)+1)}{2^{t-1}} \equiv \frac{k_1(a)(3k_1(a)+1)}{2^{t-1}} \equiv a \mod 2^{t-1}$$

et

$$\frac{(k_2(a)+1)(3k_2(a)+2)}{2^{t-1}} \equiv \frac{(k_3(a)+1)(3k_3(a)+2)}{2^{t-1}} \equiv a \mod 2^{t-1} ,$$

on a naturellement

$$\begin{aligned} H_{2^{t-1},a}(x) = {} & (-1)^{k_0(a)} q^{\frac{k_0(a)(3k_0(a)+1)-2a}{2^t}} x^{3k_0(a)} + (-1)^{k_1(a)} q^{\frac{k_1(a)(3k_1(a)+1)-2a}{2^t}} x^{3k_1(a)} \\ & -(-1)^{k_2(a)} q^{\frac{(k_2(a)+1)(3k_2(a)+2)-2a}{2^t}} x^{3k_2(a)+2} - (-1)^{k_3(a)} q^{\frac{(k_3(a)+1)(3k_3(a)+2)-2a}{2^t}} x^{3k_3(a)+2} \\ & + q^{3\cdot 2^t+1} x^{3\cdot 2^t} H_{2^{t-1},a}(q^2 x) \cdot \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

On rappelle l'équation différentielle pour $T_{(3,2^t)}$:

$$K_N(T_{(3,2^t)}, q) = 1 - q^{-3N+2} - q^{-2^t N + 2^t - 1} + q^{-(3+2^t)N+3+2^t} + q^{-3\cdot 2^t N + 5\cdot 2^t - 3} K_{N-2}(T_{(s,t)}, q) \cdot \tag{3.3.10}$$

On cherche donc $H_{(3,2^t)}$ de sorte que

$$H_{(3,2^t)}(x) = 1 - q^2 x^3 - q^{2^t-1} x^{2^t} + q^{3+2^t} x^{3+2^t} + q^{5\cdot 2^t - 3} x^{3\cdot 2^t} H_{(3,2^t)}(q^2 x) \cdot \tag{3.3.11}$$

On pourrait donc prendre $H_{(3,2^t)}(x) = (-1)^{-h''}q^{-h'}x^{-h}H_{2^{t-1},a}(x)$ pour des a, h et h' convenables. On aura donc d'après (3.3.9)

$$\begin{aligned}H_{(3,2^t)}(x) = (-1)^{k_0(a)-h''}&q^{\frac{k_0(a)(3k_0(a)+1)-2a}{2^t}-h'}x^{3k_0(a)-h}\\&+(-1)^{k_1(a)-h''}q^{\frac{k_1(a)(3k_1(a)+1)-2a}{2^t}-h'}x^{3k_1(a)-h}\\&-(-1)^{k_2(a)-h''}q^{\frac{(k_2(a)+1)(3k_2(a)+2)-2a}{2^t}-h'}x^{3k_2(a)+2-h}\\&-(-1)^{k_3(a)-h''}q^{\frac{(k_3(a)+1)(3k_3(a)+2)-2a}{2^t}-h'}x^{3k_3(a)+2-h}\\&+q^{3\cdot 2^t+1+2h}x^{3\cdot 2^t}H_{(3,2^t)}(q^2x)\cdot\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

En regardant (3.3.11), on a plusieurs conditions suivant la congruence modulo 3 des puissances de x. On obtient donc

$$\begin{cases} 3(k_1(a)-k_0(a)) = 3 \\ \dfrac{(k_1(a)-k_0(a))(3(k_0(a)+k_1(a))+1)}{2^t} = 2^\epsilon \end{cases}, \tag{3.3.13}$$

$$\begin{cases} 3(k_3(a)-k_2(a)) = 3 \\ \dfrac{(k_3(a)-k_2(a))(3(k_3(a)+k_2(a))+5)}{2^t} = 2^{3-\epsilon}, \end{cases} \tag{3.3.14}$$

et

$$|3(k_2(a)-k_0(a))+2| = 2^t \tag{3.3.15}$$

avec $\epsilon \in \{1;2\}$. On déduit donc que

$$\begin{cases} k_0(a) = \dfrac{2(2^{t+\epsilon-2}-1)}{3} \\ k_1(0) = \dfrac{2^{t+\epsilon-1}+1}{3} \end{cases}, \tag{3.3.16}$$

$$\begin{cases} k_2(a) = \dfrac{4(2^{t-\epsilon}-1)}{3} \\ k_3(0) = \dfrac{2^{t-\epsilon+2}-1}{3} \end{cases}, \tag{3.3.17}$$

et

$$2^t = 2^t|2^{2-\epsilon} - 2^{\epsilon-1}|\cdot \tag{3.3.18}$$

La dernière égalité reste toujours vraie pour $\epsilon \in \{1;2\}$. On a également

$$h = \min\{3k_0(a), 3k_2(a)+2\} = \min\{2^{t+\epsilon-1}-2; 2^{t-\epsilon+2}-2\}, \tag{3.3.19}$$

$$h' = \min\{\left\lfloor\frac{k_0(a)(3k_0(a)+1)}{2^t}\right\rfloor; \left\lfloor\frac{(k_2(a)+1)(3k_2(a)+2)}{2^t}\right\rfloor\}$$

et donc

$$h' = \min\{\left\lfloor \frac{(2^{t+\epsilon-1}-2)(2^{t+\epsilon-1}-1)}{3\cdot 2^t} \right\rfloor ; \left\lfloor \frac{(2^{t-\epsilon+2}-1)(2^{t-\epsilon+2}-2)}{3\cdot 2^t} \right\rfloor\} \tag{3.3.20}$$

et

$$h'' = \min\{k_0(a), k_2(a)+1\} = \min\{\frac{2^{t+\epsilon-1}-2}{3}; \frac{2^{t-\epsilon+2}-1}{3}\}\cdot \tag{3.3.21}$$

On remarque par la même occasion que $\epsilon \in \{1;2\}$ est de même parité que t pour assurer la divisibilité par 3 de $2^{t-\epsilon}-1$ et $2^{t+\epsilon-2}-1$.

($\star$) Pour t pair, on a $\epsilon = 2$ et

$$\begin{cases} k_0(a) = \dfrac{2(2^t-1)}{3} \quad \text{et} \quad \dfrac{k_0(a)(3k_0(a)+1)}{2^t} = \dfrac{(2^{t+1}-2)(2^{t+1}-1)}{3\cdot 2^t} \\ k_1(a) = \dfrac{2^{t+1}+1}{3} \quad \text{et} \quad \dfrac{k_1(a)(3k_1(a)+1)}{2^t} = \dfrac{(2^{t+1}+2)(2^{t+1}+1)}{3\cdot 2^t} \\ k_2(a) = \dfrac{(2^t-4)}{3} \quad \text{et} \quad \dfrac{(k_2(a)+1)(3k_2(a)+2)}{2^t} = \dfrac{(2^t-2)(2^t-1)}{3\cdot 2^t} \\ k_3(a) = \dfrac{(2^t-1)}{3} \quad \text{et} \quad \dfrac{(k_3(a)+1)(3k_3(a)+2)}{2^t} = \dfrac{(2^t+2)(2^t+1)}{3\cdot 2^t} \\ h = 2^t - 2 \\ h' = \left\lfloor \dfrac{(2^t-2)(2^t-1)}{3\cdot 2^t} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{2^t-1}{3} - \dfrac{(2^t-1)}{3\cdot 2^{t-1}} \right\rfloor = \dfrac{2^t-4}{3} \\ h'' = \dfrac{2^t-1}{3} \\ a = 2^{t-1}(\dfrac{(2^t-2)(2^t-1)}{3\cdot 2^t} - h') = 2^{t-1} - \dfrac{2^t-1}{3} = \dfrac{2^{t-1}+1}{3} \end{cases} \tag{3.3.22}$$

On obtient donc

$$H_{(3,2^t)} = (-1)^{\frac{1-2^t}{3}} q^{\frac{4-2^t}{3}} x^{2-2^t} H_{2^{t-1}, \frac{2^{t-1}+1}{3}}(x) \tag{3.3.23}$$

et on a bien la relation de réccurence voulue (3.3.11) après vérification dans (3.3.12). On remarque en outre que cela correspond exactement pour $t = 2$ du nœud torique $T_{(3,4)}$.

($\star\star$) Pour $t>2$ impair, on a $\epsilon=1$ et

$$\begin{cases} k_0(a)=\dfrac{2(2^{t-1}-1)}{3} \quad \text{et} \quad \dfrac{k_0(a)(3k_0(a)+1)}{2^t}=\dfrac{(2^t-2)(2^t-1)}{3\cdot 2^t} \\ k_1(a)=\dfrac{2^t+1}{3} \quad \text{et} \quad \dfrac{k_1(a)(3k_1(a)+1)}{2^t}=\dfrac{(2^t+2)(2^t+1)}{3\cdot 2^t} \\ k_2(a)=\dfrac{(2^{t+1}-4)}{3} \quad \text{et} \quad \dfrac{(k_2(a)+1)(3k_2(a)+2)}{2^t}=\dfrac{(2^{t+1}-2)(2^{t+1}-1)}{3\cdot 2^t} \\ k_3(a)=\dfrac{(2^{t+1}-1)}{3} \quad \text{et} \quad \dfrac{(k_3(a)+1)(3k_3(a)+2)}{2^t}=\dfrac{(2^{t+1}+2)(2^{t+1}+1)}{3\cdot 2^t} \\ h=2^t-2 \\ h'=\left\lfloor \dfrac{(2^t-2)(2^t-1)}{3\cdot 2^t}\right\rfloor=\left\lfloor \dfrac{2^t-2}{3}-\dfrac{(2^{t-1}-1)}{3\cdot 2^{t-1}}\right\rfloor=\dfrac{2^t-5}{3} \\ h''=\dfrac{2^t-2}{3} \\ a=2^{t-1}(\dfrac{(2^t-2)(2^t-1)}{3\cdot 2^t}-h')=2^{t-1}-\dfrac{2^{t-1}-1}{3}=\dfrac{2^t+1}{3} \end{cases}. \tag{3.3.24}$$

On pose cette fois

$$H_{(3,2^t)}=(-1)^{\frac{(2-2^t)}{3}}q^{\frac{5-2^t}{3}}x^{2-2^t}H_{2^{t-1},\frac{2^t+1}{3}}(x) \tag{3.3.25}$$

et on a notre relation de récurrence souhaitée.

3.3.4 Une formule pour $J_N(T_{(3,2^t)},q)$

On pose naturellement dans cette partie $a(t),h(t),h'(t),h''(t)$ les valeurs trouvées précédemment suivant la parité de t. On pose en plus $m(t)=2^{t-1}$. On peut alors remarquer que $3a(t)\equiv 1 \mod m(t)$. On a donc

$$H_{(3,2^t)}(x)=(-1)^{-h''(t)}q^{-h'(t)}x^{-h(t)}\sum_{n\geq 0}(x)_{n+1}x^{nm(t)}$$

$$\times \sum_{3\sum_{l=1}^{m(t)-1}j_l l\equiv 1[m(t)]}(-x)^{\sum_{l=1}^{m(t)-1}j_l}q^{\frac{-a(t)+\sum_{l=1}^{m(t)-1}j_l l}{m(t)}+\sum_{l=1}^{m(t)-1}\binom{j_l}{2}}$$

$$\times\sum_{k=0}^{m(t)-1}x^k\prod_{l=1}^{m(t)-1}\begin{bmatrix} n+\chi(l\leq k) \\ j_l\end{bmatrix}. \tag{3.3.26}$$

On vérifie aisément que $H_{(3,2^{2t+\theta})}(1) = 0$. Ainsi, pour $x = q^{-1}$, on a avec $m = n = m(t) = 2^{t-1}$ dans (3.3.8)

$$H_{2^{t-1}}(q^{-1}) = \sum_{k=0}^{2^{t-1}-1} (-1)^k q^{\frac{k(3k+1)}{2^t} - 3k} - \sum_{k=0}^{2^{t-1}-1} (-1)^k q^{\frac{(k+1)(3k+2)}{2^t} - 3k - 2}.$$

En regardant les $k_i(a)$ précédents, on observe qu'il n'y en a que 2 qui sont inférieurs à 2^{t-1} et après simplification pour chaque cas, (c'est le début de l'équation différentielle) on obtient

$$H_{(3,2^t)}(q^{-1}) = 1 - q^2 q^{-3} = 1 - q^{-1}.$$

Le fonction choisie est donc bien celle que l'on recherche et qui correspond à

$$H_{(3,2^t)}(q^{-N}) = K_N(T_{(3,2^t)}, q)\,.$$

On a donc d'après la partie précédente

$$K_N(T_{(3,2^t)}, q) = (-1)^{-h''(t)} q^{-h'(t)+Nh(t)} \sum_{n \geq 0} (q^{-N})_{n+1} q^{-Nnm(t)}$$
$$\times \sum_{3\sum_{l=1}^{m(t)-1} j_l l \equiv 1[m(t)]} (-q^{-N})^{\sum_{l=1}^{m(t)-1} j_l} q^{\frac{-a(t)+\sum_{l=1}^{m(t)-1} j_l l}{m(t)} + \sum_{l=1}^{m(t)-1} \binom{j_l}{2}}$$
$$\times \sum_{k=0}^{m(t)-1} q^{-kN} \prod_{l=1}^{m(t)-1} \begin{bmatrix} n + \chi(l \leq k) \\ j_l \end{bmatrix}. \tag{3.3.27}$$

On a donc un théorème qui généralise le cas $T_{(3,4)}$

Théorème 3.2.

$$J_N(T_{(3,2^t)}, q) = (-1)^{-h''(t)} q^{2^t-1-h'(t)-N} \sum_{n \geq 0} (q^{1-N})_n q^{-Nnm(t)}$$
$$\times \sum_{3\sum_{l=1}^{m(t)-1} j_l l \equiv 1[m(t)]} (-q^{-N})^{\sum_{l=1}^{m(t)-1} j_l} q^{\frac{-a(t)+\sum_{l=1}^{m(t)-1} j_l l}{m(t)} + \sum_{l=1}^{m(t)-1} \binom{j_l}{2}}$$
$$\times \sum_{k=0}^{m(t)-1} q^{-kN} \prod_{l=1}^{m(t)-1} \begin{bmatrix} n + \chi(l \leq k) \\ j_l \end{bmatrix}. \tag{3.3.28}$$

On retrouve sans difficulté la formule du nœud torique $T_{(3,4)}$ pour $t = 2$.

3.4 Question ouverte

On pourrait se demander s'il est possible de trouver $C_n(T_{(3,2^t)}, q)$ dans la formule de l'expansion cyclotomique d'Habiro.

Dans un premier temps, on se pencherait naturellement sur la formule (3.3.28). On a bien un début de formule qui correspond. Cependant

$$q^{-N(1+nm(t)+k+\sum_{l=1}^{m(t)-1} j_l)}$$

donne une puissance négative de q^N, ce qui n'est pas le cas des puissance de q^N dans $(q^{1+N})_n$ qui sont toutes positives.

Comme dans la section 2, il est également possible d'explorer la piste suivant laquelle on donne une expression de $C_n(T_{(3,2^t)}, q)$ à partir de la formule (1.3.5). On a donc

$$C_n(T_{(3,2^t)}, q) = q^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(1-q^{2k})}{(q)_{n+1-k}(q)_{n+1+k}} (-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} (1-q^{-k}) J_k(T_{(3,2^t)}, q) \cdot$$

On obtient en utilisant (3.3.28) une somme assez complexe. Cependant on peut aussi remarquer que $C_n(T_{(3,2^t)}, q)$ est lié à la somme

$$(-1)^{-h''(t)} q^{2^t-1-h'(t)} q^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(1-q^{2k})}{(q)_{n+1-k}(q)_{n+1+k}} (-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^{-k} H_{2^{t-1}}(q^{-k}), \tag{3.4.1}$$

qui est dans $\mathbb{Z}(q)[q^{2^{1-t}}]$, de manière unique comme la partie rattachée à $2^{1-t}a(t)$. Cette dernière est plus facile à manipuler car on a par l'dentité q-binomiale

$$xH_{2^{t-1}}(x) = \sum_{m\geq 1} (x; q^{2^{1-t}})_m x^m = \sum_{m\geq 1} \sum_{l=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ l \end{bmatrix}_{q^{2^{1-t}}} q^{\frac{l(l-1)}{2^t}} x^{l+m} \cdot \tag{3.4.2}$$

Pour les q^{-k} les sommes sont finies, et on obtient pour la grande somme

$$\sum_{m=1}^{(n+1)2^{t-1}} \sum_{l=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ l \end{bmatrix}_{q^{2^{1-t}}} q^{\frac{l(l-1)}{2^t}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(1-q^{2k})}{(q)_{n+1-k}(q)_{n+1+k}} (-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}-k(l+m)},$$

ou encore

$$\sum_{m=1}^{(n+1)2^{t-1}} \sum_{l=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ l \end{bmatrix}_{q^{2^{1-t}}} q^{\frac{l(l-1)}{2^t}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k q^{\frac{k^2}{2}-k(l+m+\frac{1}{2})} - (-1)^k q^{\frac{k^2}{2}-k(-2+l+m+\frac{1}{2})}}{(q)_{n+1-k}(q)_{n+1+k}}.$$

Les transformations utilisées dans la section 2 sur les paires de Bailey ne sont pas applicables ici (termes partiels).

On a bien une difficulté à trouver une expression explicite pour $C_n(T_{(3,2^t)}, q)$.

References

[1] Andrews G.E., *Multiples series of Rogers-Ramanujan types identities*, Pacific Journal of Math.,(2),**114**(1984),267-282.

[2] Andrews G.E., *q-series: their development and application in Analysis,Number Theory, Combinatorics, Physics, and Computer Algebra*, Regional conference series in math.,**66**(1985),10-11.

[3] Bailey W.N., *Some identities in combinatory analysis*, Proc. London Math Soc.,(2), **49**(1947),421-435.

[4] Bailey W.N., *Identities of the Rogers-Ramanujan types*, Proc. London Math Soc.,(2), **50**(1949),1-10.

[5] Bryson J., Ono K., Pitman S., Rhoades R.C., *Unimodal sequences and quantum and mock modular forms*, Proc. Natl. Acad. Sci.,109, 16063-16067(2012)

[6] Habiro K. *A unified WittenReshetikhinTuraev invariant for integral homology sphere*, Invent. Math., 171 ,1-81 (2008).arXiv:math/0605314 29.

[7] Hikami K.,*Difference equation of the colored Jones polynomial for the torus knot*, Int. J. Math.,15,959-965(2004). arXiv:math/0403224

[8] Hikami K., Lovejoy J., *Torus knots and quantum modular forms*, Research in the Mathematical Sciences, 2014,**1**,16

[9] Hikami K., *q-series and L-functions related to half-derivatives of the Andrews-Gordon identity*, Ramanujan J. (2004)

[10] Hikami K., Kirillov A.N., *Hypergeometric genereting function of L-function, Slater's identities, and quantum invariant*,2000 Mathematics subject Classification, June 2004

[11] Lickorish W.B.R., *An Introduction to Knot Theory*, vol.175 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, NewYork(1997)

[12] Lovejoy J., *Bailey pairs and in definite quadratic forms*, J. Math. Anal. Appl.,410,1002-1013(2014)

[13] Morton H.R., *The coloured Jones function and Alexander polynomial for torus knots* , Proc. Cambridge Philos.Soc. 117,129-135(1995)

[14] Rosso M., Jones V. *On the invariants of torus knots derived from quantum groups*, J.Knot Theory Ramifications 2, 97-112(1993)

[15] Zagier,D. *Vassiliev invariants and a strange identity related to the Dedekind eta-function*, Topology 40,945-960 (2001) 30.