

# CALCUL D'AIRES DE POLYGONES DANS $\mathbb{R}^2$ À COEFFICIENTS DANS $\mathbb{Z}^2$ .

Isaac KONAN, Licence 3 MFA, Magistère 1, Faculté d'Orsay.

Mars 2014

On considère ici le plan Euclidien  $\mathbb{R}^2$  muni d'un repère orthonormée  $(O, I, J)$ . Intéressons-nous aux points à coordonnées entières, soit  $\mathbb{Z}^2$ , et tout particulièrement aux polygones non croisés à sommets dans  $\mathbb{Z}^2$ .

**Rappel 1.** On définit un polygone  $P$  par la donnée de  $n$  points  $A_1, \dots, A_n$  du plan deux à deux distincts et pris dans cet ordre, appelés sommets du polygone, et on a

$$P = \bigcup_{k=0}^n [A_k A_{k+1}], \text{ où } A_{n+1} = A_1.$$

On note également  $P = A_1 \cdots A_n$ . Les segments  $[A_k A_{k+1}]$  pour  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  sont appelés côtés.

**Rappel 2.** On dit qu'un polygone  $P$  est non-croisé si  $\mathbb{R}^2 \setminus P$  est réduit à deux parties connexes, une bornée appelée intérieur et l'autre non bornée appelée extérieur du polygone. On notera  $\text{int}(P)$  l'intérieur du polygone  $P$ .

Le but de ce projet est de montrer que pour un tel polygone  $P$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}^2$ , l'aire est fonction des nombres de points dans  $\mathbb{Z}^2$  se trouvant à l'intérieur et sur le polygone. Par souci de clarté, on notera

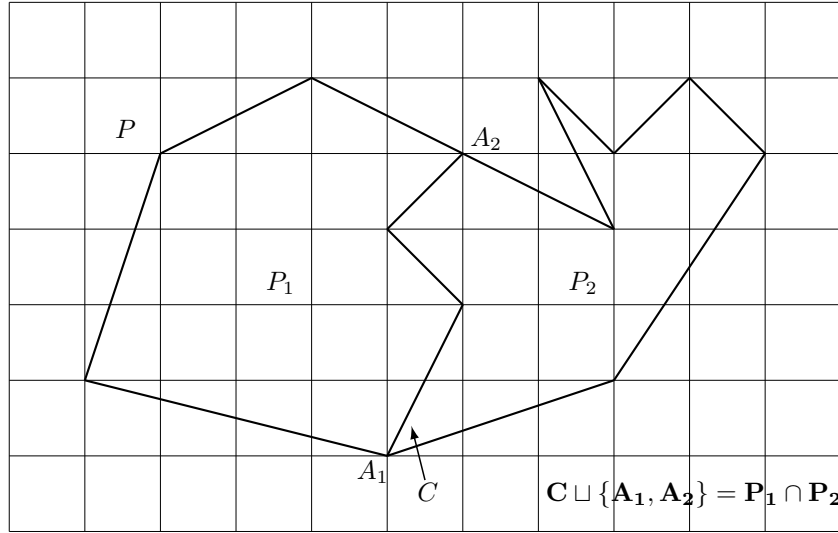
$$\begin{aligned} N_b(P) &= \#\mathbb{Z}^2 \cap P, \\ N_i(P) &= \#\mathbb{Z}^2 \cap \text{int}(P), \\ \mathcal{A}(P) &= \text{aire de } P, \end{aligned}$$

dans toute la suite.

# 1 À LA RECHERCHE DE LA RELATION ENTRE $N_b$ , $N_i$ ET $\mathcal{A}$ .

## 1.1 La bonne idée.

L'idée clé pour trouver une relation entre  $N_b$ ,  $N_i$  et  $\mathcal{A}$  est de considérer le problème suivant : supposons  $P$  un polygone dans  $\mathbb{Z}^2$  et scindons  $P$  en deux polygones  $P_1$  et  $P_2$  toujours dans  $\mathbb{Z}^2$ .



Posons ensuite  $N = \#\mathbb{Z}^2 \cap C$  avec  $C = P_1 \cap P_2 \cap \text{int}(P)$ . Il s'en suit donc que

$$\begin{aligned} P &= (P_1 \cup P_2) \setminus C, \\ \text{int}(P) &= \text{int}(P_1) \sqcup \text{int}(P_2) \sqcup C. \end{aligned}$$

On déduit la première relation

$$N_i(P) = N_i(P_1) + N_i(P_2) + N. \quad (1)$$

Notons que  $P_1 \cap P_2$  diffère de  $C$  des 2 sommets communs à  $P$  et  $P_1 \cap P_2$ , qui ne sont pas dans  $\text{int}(P)$ . On en déduit donc que  $\#\mathbb{Z}^2 \cap P_1 \cap P_2 = N + 2$ , et donc que

$$\begin{aligned} N_b(P) &= \#(\mathbb{Z}^2 \cap (P_1 \cup P_2)) \setminus (\mathbb{Z}^2 \cap C), \\ &= N_b(P_1) + N_b(P_2) - (N + 2) - N, \end{aligned}$$

d'où la seconde relation

$$N_b(P) = N_b(P_1) + N_b(P_2) - 2N - 2. \quad (2)$$

## 1.2 Formule de Pick.

Les relations qui lient  $P$  à  $P_1$  et  $P_2$  laissent suggérer que l'aire  $\mathcal{A}$  s'exprime comme combinaison affine de  $N_i$  et  $N_b$ . On cherche donc  $\alpha, \beta, \gamma$  des réels tels que

$$\mathcal{A} = \alpha N_b + \beta N_i + \gamma.$$

En se référant au problème du polygone  $P$  scindé en deux polygones  $P_1$  et  $P_2$ , on a donc d'une part

$$\mathcal{A}(P) = \alpha N_b(P) + \beta N_i(P) + \gamma.$$

Par (1) et (2), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(P) &= \alpha[N_b(P_1) + N_b(P_2) - 2N - 2] + \beta[N_i(P_1) + N_i(P_2) + N] + \gamma \\ \Rightarrow \mathcal{A}(P) &= \alpha[N_b(P_1) + N_b(P_2)] + \beta[N_i(P_1) + N_i(P_2)] + (-2\alpha + \beta)N - 2\alpha + \gamma. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(P_1) + \mathcal{A}(P_2) &= \alpha N_b(P_1) + \beta N_i(P_1) + \gamma + \alpha N_b(P_2) + \beta N_i(P_2) + \gamma \\ \Rightarrow \mathcal{A}(P_1) + \mathcal{A}(P_2) &= \alpha[N_b(P_1) + N_b(P_2)] + \beta[N_i(P_1) + N_i(P_2)] + 2\gamma. \end{aligned}$$

Comme  $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(P_1) + \mathcal{A}(P_2)$ , on a donc par identification le système

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta = 0, \\ -2\alpha + \gamma = 2\gamma. \end{cases}$$

Ainsi  $(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1, 2, -2)$ . En prenant le triangle basique  $OIJ$  d'aire  $\frac{1}{2}$ , on établit que  $\alpha = \frac{1}{2}$ . La formule recherchée est donc

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2}N_b + N_i - 1.}$$

*On notera cette relation  $\mathcal{R}$ . La suite du travail consiste donc à démontrer que cette relation est vraie par tout polygone non croisé à coefficients dans  $\mathbb{Z}^2$ .*

Avant de nous lancer dans une généralisation de la relation, énonçons tout d'abord un lemme qui servira de fil conducteur à sa vérification.

**Lemme 1.** *Soient  $P, P_1$  et  $P_2$  des polygones non croisés pris comme en 1.1. Si 2 de ces polygones vérifient la relation  $\mathcal{R}$ , alors le troisième la vérifie.*

Démonstration

C'est un résultat immédiat. En effet, comme vu en 1.1, on a toujours l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}N_b(P) + N_i(P) - 1 &= \frac{1}{2}[N_b(P_1) + N_b(P_2) - 2N - 2] \\ &\quad + [N_i(P_1) + N_i(P_2) + N] - 1 \\ &= \frac{1}{2}N_b(P_1) + N_i(P_1) - 1 + \frac{1}{2}N_b(P_2) + N_i(P_2) - 1. \end{aligned}$$

Comme  $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(P_1) + \mathcal{A}(P_2)$ , on a donc que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}N_b(P) + N_i(P) - 1 - \mathcal{A}(P) &= \left[ \frac{1}{2}N_b(P_1) + N_i(P_1) - 1 - \mathcal{A}(P_1) \right] \\ &\quad + \left[ \frac{1}{2}N_b(P_2) + N_i(P_2) - 1 - \mathcal{A}(P_2) \right]. \end{aligned}$$

□

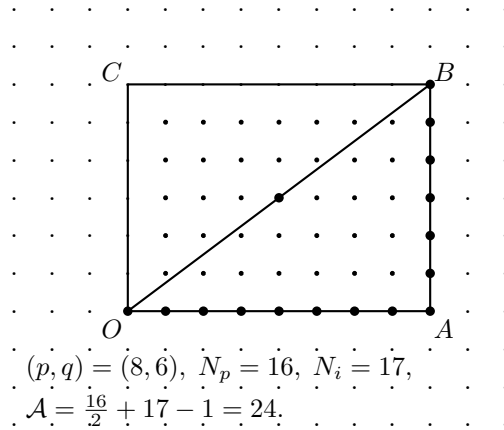
Notons qu'un polygone non croisé a au moins 3 côtés. La démonstration de relation  $\mathcal{R}$  se fera par récurrence forte sur le nombre de côtés du polygone considéré.

## 2 INITIALISATION : VÉRIFICATION DE LA RELATION $\mathcal{R}$ POUR LES TRIANGLES DANS $\mathbb{Z}^2$ .

On étudie de façon successive les triangles dont deux côtés sont parallèles aux axes, puis un et enfin aucun côté parallèle aux axes.

### 2.1 Cas d'un triangle dont deux côtés sont parallèles aux axes.

Soit  $T$  un triangle vérifiant ces conditions. Les axes du repère étant perpendiculaires, il s'agit ici d'un triangle rectangle. Sans perte de généralité, quitte à effectuer des symétries axiales et des translations, on peut supposer que  $T$  est défini par les points  $O(0, 0)$ ,  $A(p, 0)$  et  $B(p, q)$ , avec  $p, q \in \mathbb{N}^*$ . On a donc  $\mathcal{A}(T) = \frac{1}{2}pq$ .



Comment évaluer  $N_b(T)$  et  $N_i(T)$  ?

\*  $N_b(T)$  : rappelons que

$$N_b(T) = \# \mathbb{Z}^2 \cap (\{O, A, B\} \sqcup ]OA[ \sqcup ]AB[ \sqcup ]BO[).$$

On a donc

$$N_b(T) = 3 + \# (\mathbb{Z}^2 \cap ]OA[) + \# (\mathbb{Z}^2 \cap ]AB[) + \# (\mathbb{Z}^2 \cap ]OB[).$$

Or  $]OA[$  contient exactement  $p - 1$  points dans  $\mathbb{Z}^2$ , et de même  $]AB[$  en contient  $q - 1$ . On déduit donc que

$$N_b(T) = p + q + 1 + \# (\mathbb{Z}^2 \cap ]OB[).$$

Que vaut donc  $\# (\mathbb{Z}^2 \cap ]OB[)$  ? Pour y répondre, il suffit de remarquer que

$$]OB[ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in ]0, p[, qx - py = 0\} = \{(x, \frac{q}{p}x) \mid x \in ]0, p[\}.$$

Ainsi

$$\# (\mathbb{Z}^2 \cap ]OB[) = \#\{x \in \llbracket 1; p - 1 \rrbracket \mid \frac{q}{p}x \in \mathbb{Z}\}.$$

Cela revient à dire que  $p$  divise  $qx$  ou encore que  $\frac{p}{p \wedge q}$  divise  $\frac{q}{p \wedge q}x$ . Comme  $\frac{p}{p \wedge q} \wedge \frac{q}{p \wedge q} = 1$ , on en déduit par le lemme de Gauss que  $\frac{p}{p \wedge q}$  divise  $x$ . On arrive donc à

$$\# (\mathbb{Z}^2 \cap ]OB[) = \#\left(\llbracket 1; p - 1 \rrbracket \cap \frac{p}{p \wedge q} \mathbb{Z}\right).$$

Comme  $p$  multiple de  $\frac{p}{p \wedge q}$ , on dénombre donc  $p \wedge q$  multiples de  $\frac{p}{p \wedge q}$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$ . On a donc

$$\# (\mathbb{Z}^2 \cap ]OB[) = p \wedge q - 1.$$

On en conclut que

$$N_b(T) = p + q + p \wedge q. \quad (3)$$

\*  $N_i(T)$  : en rajoutant le point  $C(0, q)$ , les triangles  $OAB$  et  $OCB$  étant symétriques par rapport au point de coordonnées  $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$ , on établit aisément que

$$N_i(OABC) = 2N_i(T) + \#(Z^2 \cap ]OB[).$$

Il y a exactement  $(p-1)(q-1)$  points dans le rectangle  $OABC$ . On a donc

$$N_i(T) = \frac{1}{2} [(p-1)(q-1) - p \wedge q + 1] = \frac{1}{2} (pq - p - q - p \wedge q + 2). \quad (4)$$

La relation  $\mathcal{R}$  est donc vraie ici, puisque d'après (3) et (4)

$$\frac{1}{2}(p + q + p \wedge q) + \frac{1}{2}(pq - p - q - p \wedge q + 2) - 1 = \frac{1}{2}pq.$$

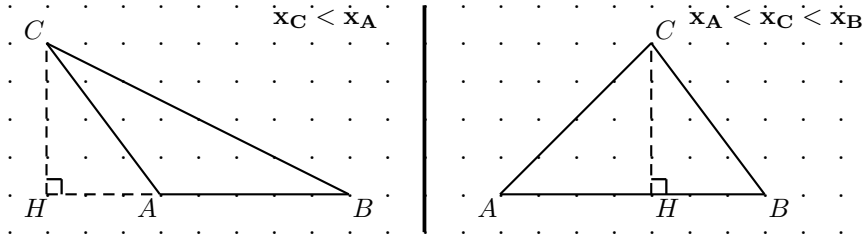
Cela nous permet aussi de voir que tout rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes vérifie la relation  $\mathcal{R}$ , puisqu'on peut le scinder en deux triangles rectangles dont deux des côtés sont parallèles aux axes pour chacun d'eux, et que l'on peut ainsi appliquer le **lemme 1**.

## 2.2 Cas d'un triangle dont un seul côté à parallèle l'un des axes.

Sans perte de généralité, quitte à effectuer une symétrie par rapport à la première bissectrice, on revient au cas où  $T = ABC$ , avec  $y_A = y_B < y_C$ ,  $x_A < x_B$  et  $x_C \notin [x_A, x_B]$ . Trois cas de figure se présente donc pour  $x_C$  à savoir

$$x_C < x_A \text{ ou } x_A < x_C < x_B \text{ ou } x_B < x_C.$$

Le dernier cas étant équivalent au premier par symétrie par rapport à l'axe  $(OJ)$ , on se limitera donc aux deux premiers cas.



En posant  $H$  la projection orthogonale de  $C$  sur  $(AB)$ , on a :

- \* dans le premier cas,  $HBC$  se scinde en  $HAC$  et  $ABC$ ,
- \* dans le second cas,  $ABC$  se scinde en  $AHC$  et  $HBC$ .

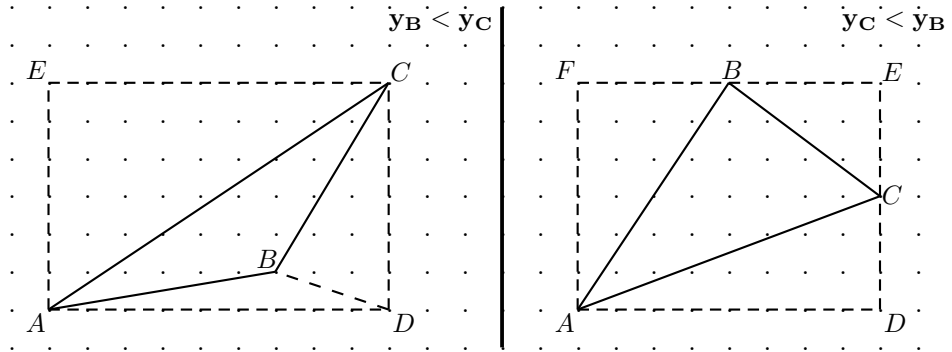
Dans les deux cas, les triangles  $HAC$  et  $HBC$  sont des triangles dont deux côtés sont parallèles aux axes, et donc vérifient la relation  $\mathcal{R}$ . On conclut avec le **lemme 1** que  $ABC$  vérifie la relation  $\mathcal{R}$ .

### 2.3 Cas d'un triangle dont aucun côté n'est parallèle avec l'un des axes.

Dans ce cas de figure, si on nomme  $ABC$  le triangle considéré, les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont tels que leurs abscisses sont deux à deux disjointes, de même pour leur ordonnées. On peut donc supposer quitte à faire des symétries par rapport aux axes que

$$x_A < x_B < x_C \quad \text{et} \quad \min\{y_A, y_B, y_C\} = y_A.$$

Ici également nous avons deux cas de figures qui se présentent, le premier  $y_B < y_C$  et le second  $y_C < y_B$ .



\* Pour le premier cas on raisonne comme suit : les triangles  $ABD$  et  $DBC$  vérifient la relation  $\mathcal{R}$  (cas 2). Par le **lemme 1**, il en est de même pour le quadrilatère  $ABCD$ . On scinde  $ADC$  en  $ABC$  et  $ABCD$ . Comme  $ADC$  (cas 1) et  $ABCD$  vérifient  $\mathcal{R}$ , toujours par le **lemme 1**,  $ABC$  vérifie  $\mathcal{R}$ .

\* Dans le second cas on compte plus d'étapes : le rectangle  $ADEF$  vérifie  $\mathcal{R}$  et se scinde en deux polygones  $ABF$  (cas 1), qui vérifie  $\mathcal{R}$ , et  $ABED$ . Par le **lemme 1**  $ABED$  vérifie  $\mathcal{R}$ .  $ABED$  se scinde en  $ABEC$  et  $ACD$  (cas 1) qui lui, vérifie  $\mathcal{R}$ , donc  $ABEC$  vérifie  $\mathcal{R}$ .  $ABEC$  se scinde en  $ABC$  et  $BEC$  (cas 1), qui vérifie  $\mathcal{R}$ . On conclut donc que  $ABC$  vérifie  $\mathcal{R}$ .

On vient ainsi de montrer que pour tout triangle à sommets dans  $\mathbb{Z}^2$ , la relation  $\mathcal{R}$  est vraie, et donc initialiser la démonstration par récurrence en fonction du nombre de côtés.

### 3 HÉRÉDITÉ : VÉRIFICATION DE LA RELATION $\mathcal{R}$ POUR LES POLYGONES DE 4 CÔTÉS OU PLUS.

Supposons que la relation  $\mathcal{R}$  soit vraie pour tout polygone à  $k \leq n$  côtés, avec  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. Qu'en est-il donc d'un polygone à  $n + 1$  côtés ? Commençons tout d'abord par quelques rappels de géométrie.

**Rappel 3.** *L'enveloppe convexe d'un ensemble  $E$  est le plus petit convexe qui contient  $E$ .*

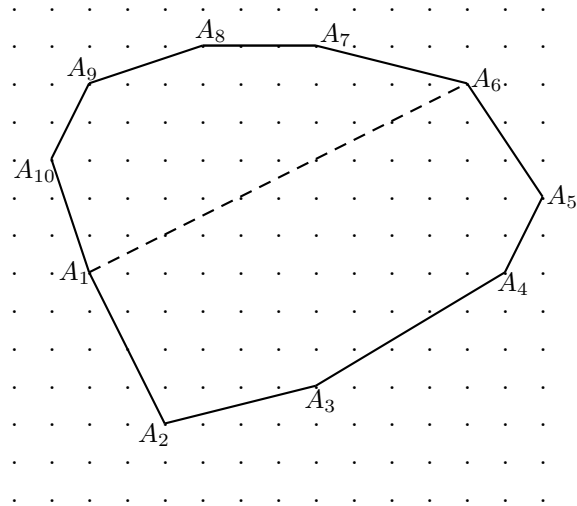
**Rappel 4.** *Soit  $A_1 \cdots A_n$  un polygone dans  $\mathbb{R}^2$ . Alors l'enveloppe convexe de  $A_1 \cdots A_n$  est un ensemble dont le bord est un polygone convexe ayant pour sommets que des éléments de  $\{A_1, \dots, A_n\}$ .*

**Rappel 5.** *Un polygone  $P$  est convexe si et seulement si son enveloppe convexe est la réunion disjointes de  $P$  et  $\text{int}(P)$ .*

Considérons maintenant un polygone  $A_1 \cdots A_{n+1}$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}^2$ .

**Premier cas :  $A_1 \cdots A_{n+1}$  convexe**

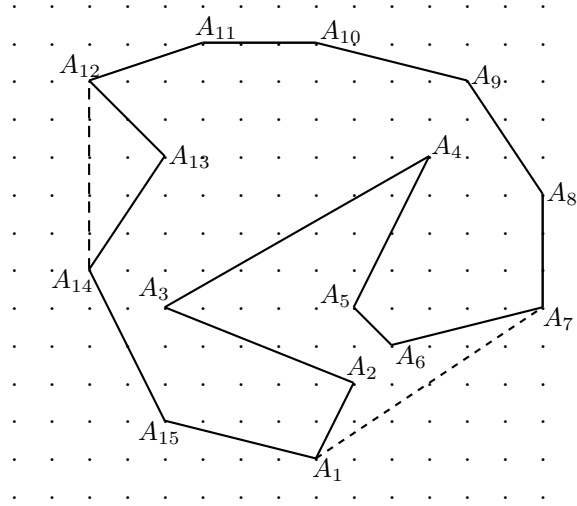
Dans ce cas, à l'aide du rappel 5, pour tout  $k$  dans  $\llbracket 3, n \rrbracket$  (on rappelle que  $n \geq 3$ ),  $]A_1, A_k[$  est dans  $\text{int}(A_1 \cdots A_{n+1})$ . On peut donc scinder  $A_1 \cdots A_{n+1}$  en deux polygones  $A_1 \cdots A_k$  et  $A_1 A_k \cdots A_{n+1}$  respectivement à  $k$  et  $n - k + 3$  côtés, donc moins de  $n$  côtés. On applique l'hypothèse de récurrence forte à ces deux polygones et on conclut grâce au **lemme 1** que  $A_1 \cdots A_{n+1}$  vérifie la relation  $\mathcal{R}$ .





**Deuxième cas :  $A_1 \cdots A_{n+1}$  non convexe**

À l'aide du rappel 4 et 5, on sait qu'il existe  $i \neq j \pm 1$  dans  $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ , tels que  $[A_i A_j]$  soit un des côtés du bord de l'enveloppe connexe de  $A_1 \cdots A_{n+1}$ . Quitte à renuméroter les indices des sommets, on peut supposer que  $[A_1 A_k]$  est le segment en question. On est donc sûr que  $k$  est dans  $[[3, n]]$ . Considérons les deux polygones  $A_1 \cdots A_k$  et  $A_k \cdots A_{n+1} A_1$ . Ils ont tous deux moins de  $n$  côtés comme au premier cas.



**L'enveloppe convexe est  $A_1 A_7 A_8 A_9 A_{10} A_{11} A_{12} A_{14} A_{15}$**   
**Les 2 polygones considérés sont  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7$  et**  
 **$A_7 A_8 A_9 A_{10} A_{11} A_{12} A_{13} A_{14} A_{15} A_1$**

Le polygone  $A_1 \cdots A_{n+1}$  étant non croisé, les lignes  $A_1 - \cdots - A_k$  et  $A_k - \cdots - A_{n+1} - A_1$  ne s'intersectent qu'aux points  $A_1$  et  $A_k$ . Ainsi les polygones  $A_1 \cdots A_k$  et  $A_k \cdots A_{n+1} A_1$  n'ont pour seule intersection que le segment  $[A_1 A_k]$ . Notons de plus que les lignes  $A_1 - \cdots - A_k$  et  $A_k - \cdots - A_{n+1} - A_1$  sont non croisées et dans le même demi-plan délimité par la droite  $(A_1 A_k)$ .

Les Polygones  $A_1 \cdots A_k$  et  $A_k \cdots A_{n+1} A_1$  sont donc deux polygones non croisés qui ont donc moins de  $n$  côtés, donc par hypothèse de récurrence forte qui vérifient la relation  $\mathcal{R}$ . De plus, ils ont un côté commun et sont situés dans le même demi-plan par rapport à ce côté. On a donc que l'un d'eux est imbriqué dans l'autre. Supposons sans perte de généralité que ce soit le polygone  $A_1 \cdots A_k$ . On a donc que le polygone non croisé  $A_k \cdots A_{n+1} A_1$  vérifiant la relation  $\mathcal{R}$  se scinde par la ligne  $A_1 - \cdots - A_k$  en deux polygones  $A_1 \cdots A_k$ , qui vérifie la relation  $\mathcal{R}$ , et  $A_1 \cdots A_{n+1}$ . Par le **lemme 1**, on conclut que  $A_1 \cdots A_{n+1}$  vérifie la relation  $\mathcal{R}$ .

On assure ainsi l'hérédité de la relation de  $n$  à  $n + 1$ .

#### 4 CONCLUSION.

Pour tout polygone dans le plan euclidien à coefficients dans  $\mathbb{Z}^2$ , on a la relation  $\mathcal{R}$  suivante :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}N_b + N_i - 1.$$

C'est la formule de Pick.

□