Examen 2 – Durée 45 min – le jeudi 8 novembre 2018

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE
L'énoncé comporte 3 exercices.

Exercice 1. Argch. (13 pts : 1+2+2+1+2+3+2)
On rappelle que la fonction ch : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. Quelle est sa parité ?
2. Montrer que pour tout $y \in [1; +\infty[$, on a
$$y - \sqrt{y^2 - 1} \leqslant 1. \tag{0.1}$$
3. Justifier que la fonction
$$f : \begin{array}{ccc} [0; +\infty[& \longrightarrow & [1; +\infty[\\ x & \longmapsto & \mathrm{ch}(x) \end{array}$$
est bijective.
Notons $g : [1; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[$ la fonction réciproque de f qui vérifie donc
$$g \circ \mathrm{ch}(x) = x \qquad \forall x \in [0; +\infty[. \tag{0.2}$$
On admetra que g est dérivable sur $]1; +\infty[$.
4. Soit $y \in]1; +\infty[$. Justifier l'existence et l'unicité de $x \in]0; +\infty[$ tel que $y = \mathrm{ch}(x)$.
5. Montrer que
$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}. \tag{0.3}$$
6. Montrer que
$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$
7. Retrouver l'expression (0.3) de la dérivée de g à l'aide de la question précédente.

Exercice 2. Question préparée : une récurrence (4 pts)
On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n + 3^n$$

Exercice 3. Question de cours (3 pts)
Donner la définition de $U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$, où $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle et l un nombre réel.

Liste de Questions de cours ou préparées pour le DS2.

1. Donner la définition de $U_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, où $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle et l un nombre réel.
2. En admettant, que la fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie

$$\begin{cases} \exp' = \exp \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$$

   montrer que pour tout x et y dans $\mathbb{R}$, on a

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

3. Donner les domaines de défintion et tracer les graphes des fonctions ln, tan et sh.
4. Soit a et b dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer par récurrence sur n que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

   On pourra utiliser sans démonstration la formule du triangle de Pascal suivante :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

5. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n + 3^n$$

CORRIGÉ

Exercice 1.

1. ch est paire car $\mathrm{ch}(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit $y \in [1;+\infty[$. Comme $y \geqslant 1$, $(y-1)^2 = y^-2y+1 \leqslant y^2+1-2 = y^2-1$. Or la fonction $\sqrt{\ }$ est croissante, donc
$$\sqrt{(y-1)^2} = |y-1| \leqslant \sqrt{y^2-1}.$$
Comme $y \geqslant 1$, $|y-1| = y-1$. Donc
$$y-1 \leqslant \sqrt{y^2-1}$$
et
$$y - \sqrt{y^2-1} \leqslant 1.$$
3. la fonction ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+,*}$. Elle est donc injective.
De plus, $\mathrm{ch}(0) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$ et ch est continue. Donc l'image de f est $[1,+\infty[$. Donc f est surjective.
Finalement f est bijective.
4. Comme f est bijective :
$$\forall y \in [1;+\infty[\quad \exists! x \in [0;+\infty[\quad \mathrm{ch}(x) = y.$$
5. On part de l'identité
$$g \circ \mathrm{ch}(x) = x \qquad \forall x \geqslant 0,$$
que l'on dérive par rapport à x :
$$\mathrm{sh}(x) g'(\mathrm{ch}(x)) = 1.$$
Posons $y = \mathrm{ch}(x)$. On obtient
$$g'(y) = \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}.$$
Or $\mathrm{sh}(x) \geqslant 0$ (car $x \geqslant 0$). Donc $\mathrm{sh}(x) = \sqrt{\mathrm{sh}^2(x)} = \sqrt{\mathrm{ch}^2(x)-1}$. Ainsi
$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$
6. On a
$$2y = e^x + e^{-x}$$
et
$$2ye^x = (e^x)^2 + 1.$$
Posons $X = e^x$. On obtient $X^2 - 2yX + 1 = 0$. Résolvant cette équation de degré 2 en X on obtient
$$X = \sqrt{y^2-1} + y \quad \text{ou} \quad -\sqrt{y^2-1} + y.$$
Or $x \in]0,+\infty[$, donc $X = e^x \in]1;+\infty[$. Mais alors, la question 2 montre que $X \neq -\sqrt{y^2-1}+y$. Donc
$$X = e^x = \sqrt{y^2-1} + y.$$
Appliquant ln, on obtient
$$x = \ln(y + \sqrt{y^2-1}).$$

7. On part de
$$g(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}),$$
que lon dérive :
$$g'(y) = \frac{1 + \frac{2y}{2\sqrt{y^2-1}}}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = \frac{\frac{\sqrt{y^2-1}+y}{\sqrt{y^2-1}}}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

Exercice 2. On fait une récurrence double. Notons H_n l'assertion
$$U_n = 2^n + 3^n.$$
On vérifie que
$$U_0 = 2 = 2^0 + 3^0 \quad \text{et} \quad U_1 = 5 = 2^1 + 3^1.$$
Donc H_0 et H_1 sont vrai.

Fixons $n \geqslant 2$. Supposons que H_{n-1} et H_{n-2} sont vrai. Montrons que H_n est vrai. On a
$$\begin{aligned} U_n = & \ 5U_{n-1} - 6U_{n-2} & \\ = & \ 5(2^{n-1} + 3^{n-1}) - 6(2^{n-2} + 3^{n-2}) & \text{d'aprs } H_{n-1} \text{ et } H_{n-2} \\ = & \ 10 \times 2^{n-2} + 15 \times 3^{n-2} - 6(2^{n-2} + 3^{n-2}) & \\ = & \ 2^n + 3^n. & \end{aligned}$$

Exercice 3.
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad |U_n - l| \leqslant \varepsilon$$
ou
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \implies |U_n - l| \leqslant \varepsilon).$$