Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Fondamentaux des maths I
Semestre d'automne 2018-19 — Groupe Math

Examen Partiel – Durée 90 min – le jeudi 29 novembre 2018

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE
L'énoncé comporte 3 exercices.

Exercice 1. Calculer le module et l'argument du nombre complexe

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}.$$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0.$$

Exercice 3.
Posons

$$z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

1. Calculer z^2.
2. Calculer le module et l'argument de z^2.
3. Déterminer le module et l'argument de z (en fonction de ceux de z^2 si vous n'avez pas répondu à la question précédente).
4. Déterminer $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.
5. Déterminer $\cos(\frac{3\pi}{8})$ et $\sin(\frac{3\pi}{8})$.

Exercice 4.
Trouver tous les nombres réels x tels que

$$x^4 - 3x^3 + (2-i)x^2 + 3x - 3 + i = 0.$$

Exercice 5.
Considérons la fonction

$$\begin{array}{rccl} f\ : &]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1+\frac{1}{x}. \end{array}$$

On définit une suite par récurrence

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 1 + \frac{1}{U_n}. \end{cases}$$

1. Calculer U_1, U_2 et U_3.
2. Montrer que pour tout n,
$$1 \leqslant U_n \leqslant 2.$$
3. Montrer que la fonction f est décroissante.

4. Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} U_n \leqslant U_{n+2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ U_n \geqslant U_{n+2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

   Indication : Poser la récurrence, faire l'initialisation, puis pour l'hérédité distinguer 2 cas suivant la parité de n.
5. Montrer que les suites extraites U_{2n} et U_{2n+1} sont monotones.
6. En déduire, que ces suites convergent vers des limites que l'on note respectivement l_0 et l_1.
7. Calculer $f \circ f$.
8. Montrer que $l_0 = l_1$. On pourra admettre que $(f \circ f)(l_0) = l_0$ et $(f \circ f)(l_1) = l_1$.
9. Montrer que U_n converge. Quelle est sa limite ?

CORRECTION

Exercice 1. On a

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}-i+3i+\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

On a donc $|z|^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$. Puisque $|z| \in \mathbb{R}^+$, on en déduit que $|z| = 1$.
Soit $\theta \in [0; 2\pi[$ l'argument de z. On a $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$. Donc $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0.$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = (1-5i)^2 - 4i(6i-2) = 1 - 25 - 10i + 24 + 8i = -2i.$$

Comme $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, si $\alpha = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a $\alpha^2 = i$. Donc si $\delta = i\sqrt{2}\alpha = i - 1$ on a

$$\delta^2 = \Delta.$$

On en déduit que les solutions de l'équation sont

$$\frac{\pm\delta - (1-5i)}{2i}.$$

c'est-à-dire $3 + i$ et 2.

Exercice 3.
Posons

$$z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

1. On a $z^2 = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$.
2. On a $|z^2| = 4$.
   Soit $\theta \in [0; 2\pi[$ l'argument de z^2. On a $\cos(\theta) = \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\theta = \frac{\pi}{4}$.
3. On a $|z| = \sqrt{|z^2|} = 2$ et l'argument de z est la moitié de celui de z^2 soit $\frac{\pi}{8}$.
4. On a $\cos(\frac{\pi}{8}) = Re(\frac{z}{|z|}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. De même $\sin(\frac{\pi}{8}) = Im(\frac{z}{|z|}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
5. On remarque que
   $$\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}.$$
   Donc
   $$\cos(\frac{3\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$
   et
   $$\sin(\frac{3\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Exercice 4.
Trouver tous les nombres réels x tels que

$$z := x^4 - 3x^3 + (2-i)x^2 + 3x - 3 + i = 0.$$

Les parties réelles et imaginaires de z soivent être nulles. Donc $z=0$ si et seulement si

$$\begin{cases} x^4-3x^3+2x^2+3x-3=0 \\ -x^2+1=0 \end{cases}$$

Ce qui équivaut à $x=\pm1$ et $x^4-3x^3+2x^2+3x-3=0$. Pour chacune des deux valeurs $x=\pm1$ on calcule le polynôme de degré 4 et on trouve 0 à chaque fois.
Il y a donc exactement 2 solutions ±1.

Exercice 5.

1. $U_1=1+1=2$, $U_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $U_3=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$.
2. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$1\leqslant U_n\leqslant 2.$$

Pour $n=0$, on a $1\leqslant U_0=1\leqslant 2$. L'initialisation est faite.
Suppons que $1\leqslant U_n\leqslant 2$. Comme $x\mapsto\frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$, on a

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{U_n}\leqslant 1.$$

Donc

$$\frac{3}{2}\leqslant 1+\frac{1}{U_n}\leqslant 2$$

et

$$1\leqslant\frac{3}{2}\leqslant U_{n+1}\leqslant 2.$$

L'hérédité est démontrée.

3. f est la somme d'une constante et d'une fonction décroissante, elle est décroissante.
4. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{cases} U_n\leqslant U_{n+2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ U_n\geqslant U_{n+2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Pour $n=0$, n est pair et

$$U_0=1\leqslant U_{0+2}=\frac{3}{2}.$$

L'initialisation est faite.
Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que

$$\begin{cases} U_n\leqslant U_{n+2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ U_n\geqslant U_{n+2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Montrons que

$$\begin{cases} U_{n+1}\leqslant U_{n+3} \text{ si } n+1 \text{ est pair} \\ U_{n+1}\geqslant U_{n+3} \text{ si } n+1 \text{ est impair} \end{cases}$$

Cas 1. n est pair.
Alors $U_n\leqslant U_{n+2}$. Comme f est décroissante, on en déduit que $U_{n+1}=f(U_n)\geqslant f(U_{n+2})=U_{n+3}$ ce qui est l'inégalité cherchée car $n+1$ est impair.

Cas 2. n est impair.
Alors $U_n\geqslant U_{n+2}$. Comme f est décroissante, on en déduit que $U_{n+1}=f(U_n)\leqslant f(U_{n+2})=U_{n+3}$ ce qui est l'inégalité cherchée car $n+1$ est pair.

5. D'après la question précédente, pour tout n, on a $U_{2(n+1)}=U_{2n+2}\geqslant U_{2n}$. Donc la suite U_{2n} est croissante.

   D'après la question précédente, pour tout n, on a $U_{2(n+1)+1}=U_{2n+3}\leqslant U_{2n+1}$. Donc la suite U_{2n+1} est décroissante.

6. Ces suites sont monotones et bornées par les questions précédentes. Donc d'après un théorème du cours, elles convergent.
7. Pour $x \in]0; +\infty[$, on a

$$(f \circ f)(x) = 1 + \frac{1}{f(x)} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{1+x} = \frac{1+2x}{1+x}.$$

8. Pour $l = l_0$ ou $l = l_1$, on a $(f \circ f)(l) = l$ et $l \in [1; 2]$. Donc

$$1 + 2l = (1+l)l = l^2 + l,$$

   c'est-à-dire $l^2 - l - 1 = 0$. On résout cette équation de degré 2. $\Delta = 5$ et $l = \frac{\pm\sqrt{5}+1}{2}$. Comme $l \geqslant 0$, on obtient

$$l = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

   En particulier, $l_0 = l_1$
9. Comme les termes pairs et impairs convergent vers la même limite, U_n converge vers cette limite commune c'est-à-dire vers $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.