

## Feuille 10. Dérivabilité

**Exercice 10-1** Pour chacune des fonctions  $f$  définies ci-dessous, calculer la fonction dérivée  $f'$  :

- |                                  |                                      |  |                                |
|----------------------------------|--------------------------------------|--|--------------------------------|
| 1) $x^4 + 3x^2 - 6$              | 2) $6x^{7/2} + 4x^{5/2} - 2x$        | 3) $\sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$ | 4) $x(x+3)e^x$                 |
| 5) $\frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2}$ | 6) $\frac{\sqrt{1+x}}{1 + \sqrt{x}}$ | 7) $\frac{\ln x}{x^3}$                     | 8) $\frac{\sin x}{1 + \cos x}$ |
| 9) $\sqrt[3]{x^2 + x + 1}$       | 10) $\sin(\cos(3x))$                 | 11) $\ln(\sin^2 x)$                        | 12) $e^{-x^2}$                 |
| 13) $(1-x)^{7/3}$                | 14) $\ln( 2x )$                      | 15) $\ln( e^{2i\pi x} )$                   | 16) $2^{\ln x}$                |

**Exercice 10-2** Déterminer  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ ax^2 + bx + 1, & \text{si } x > 1, \end{cases} \quad (1)$$

soit dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Exercice 10-3**

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x, & \text{si } x < 0, \\ \cos^2(\pi x), & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 + \frac{\ln x}{x}, & \text{si } x > 1. \end{cases} \quad (2)$$

2. Même question avec :  $f(x) = \sqrt{|x|}$ .

**Exercice 10-4** Préciser pour chacune des fonctions suivantes de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  en quels points elles sont dérivables, dérivables à droite, dérivables à gauche, et les valeurs de leurs dérivées, dérivées à droite, dérivées à gauche.

1.  $f(x) = \cos(\cos x)$ .
2.  $h(x) = \sqrt{1 + \cos x}$ .
3.  $f(x) = \sqrt{|\sin x|}$ .

**Exercice 10-5** Soit  $f$  la fonction réelle d'une variable réelle définie par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x + \exp(-1/x^2), & \text{si } x > 0, \\ \sin x, & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

1. Montrer que  $f$  est dérivable en tout point  $x$  de  $\mathbb{R}^*$  en calculant sa dérivée.
2.  $f$  est-elle dérivable en 0 ?
3.  $f'$  est-elle continue en 0 ?
4.  $f$  est-elle deux fois dérivable en 0 ?

**Exercice 10-6** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On définit  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de  $n$ ,  $f_n$  est-elle continue ?
2. Pour quelles valeurs de  $n$ , est-elle  $f_n$  dérivable ?
3. Pour quelles valeurs de  $n$ , est-elle  $f'_n$  continue ?
4. Pour quelles valeurs de  $n$ , est-elle  $f'_n$  dérivable ?

**Exercice 10-7** Appliquer le théorème des accroissements finis pour démontrer les inégalités suivantes :

1.  $|\sin x| \leq |x|$  pour  $x \geq 0$  ;
2.  $\ln(1+x) \leq x$  pour  $x \geq 0$ .

**Exercice 10-8**

1. Montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$  avec  $0 \leq a < b$  :

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

2. En déduire que :

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

**Exercice 10-9**

1. Montrer que pour tous réels  $x$  et  $y$  :  $|\cos y - \cos x| \leq |y - x|$ .
2. Montrer que pour tous réels  $x$  et  $y$  tels que  $x \neq y$  :  $|\cos y - \cos x| < |y - x|$ .

**Exercice 10-10** Soit  $f$  de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}$  une fonction trois fois dérivable.

1. On suppose que  $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$  et que  $f(1) = 0$ . Montrer que  $f'''$  s'annule sur l'intervalle  $]0, 1[$ .
2. On suppose ici que  $f(0) = f(1/3) = f(2/3) = f(1) = 0$ . Montrer le même résultat.
3. On suppose ici que  $f(0) = f'(0) = 0$  et que  $f(1) = f'(1) = 0$ . Montrer le même résultat.

**Exercice 10-11** Montrer que  $100 + \frac{1}{200}$  est une approximation par excès de  $\sqrt{10001}$ , et que l'erreur d'approximation est inférieure à  $\frac{1}{4 \cdot 10^6}$ .

**Exercice 10-12** Montrer que pour tout entier  $k \geq 1$  :  $0 < \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ . En déduire que pour

tout entier  $n \geq 1$ ,  $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ .

Déterminer  $\lim_{n \in \mathbb{N}} H_n$  où  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  ?

### Exercice 10-13

1. Utiliser l'exercice précédent pour montrer que pour  $\alpha \leq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \infty.$$

2. On suppose maintenant  $\alpha > 1$ . Pour  $k \geq 2$ , comparer  $\frac{\alpha - 1}{k^\alpha}$  et  $\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}$ .

3. Toujours pour  $\alpha > 1$ , montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \ell, \text{ avec } \ell < \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

**Exercice 10-101** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. Calculer  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a f(x) - x f(a)}{x - a}$ , pour un  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 10-102** Montrer que la fonction  $P$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $P(x) = x^{100} + ax^7 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) a au plus 4 racines réelles.

**Exercice 10-103** On définit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(1+x^2) - \arctan x \end{aligned}$$

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$  où  $P_n$  est un polynôme de degré  $n$  qui satisfait les identités
- (a)  $P_1(x) = 2x - 1$ ,
  - (b)  $P_{n+1}(x) = (x^2 + 1)P'_n(x) - 2xP_n(x)$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , le polynôme  $P_n$  a  $n$  racines distinctes.

**Exercice 10-104** Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, dérivable sur  $]a, b[$ . Montrer que  $f$  est dérivable à droite en  $a$  et  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ , en supposant que cette limite est finie.

**Exercice 10-105** Soient  $a < b$  deux réels. Existe-t-il une fonction dérivable  $f$  de  $[a, b[$  vers  $\mathbb{R}$  telle que l'on ait simultanément le comportement asymptotique  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$  et la majoration  $|f'| \leq 1$ ?

**Exercice 10-106** Soit  $f$  de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}$  une application continue sur  $[0, 1]$  telle que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ .

On suppose que  $f$  est dérivable en 0 et en 1 et que l'on a  $f'(0) = f'(1) = 0$ .

1. Montrer qu'il existe un  $\alpha$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1}.$$

En déduire que  $f(\alpha) = \alpha$ . [Indication : étudier la fonction  $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$ .]

2. On suppose de plus que  $f$  est deux fois dérivable sur  $[0, 1]$ . Montrer qu'il existe un  $\beta$  dans  $]0, 1[$  tel que  $|f''(\beta)| \geq 4$ . [Indication : raisonner par l'absurde et étudier les fonctions  $x \mapsto f(x) - 2x^2$  et  $x \mapsto 1 - f(x) - 2(1-x)^2$ .]

**Exercice 10-107** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x \ln x - x$ .

1. En appliquant à  $f$  le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$\ln n \leq f(n+1) - f(n) \leq \ln(n+1).$$

2. En déduire que pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n \leq f(n+1) + 1 \leq \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(n+1).$$

3. En déduire que pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$