Feuille 2 : Sur les applications

Exercice 2-1

1. On note $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{0,1,2,3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$.
2. On note $A = [1,3]$ et $B = [2,4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.
3. On note $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2, 7]$ et $C =]-5, +\infty[$. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$ et $B \cup C$.

Exercice 2-2

Soit A et B deux ensembles. Montrer l'équivalence :

$$A \subset B \iff A \cup B = B.$$

Exercice 2-3

Soit A, B et C trois ensembles.

1. L'implication suivante est-elle vraie :

$$(A \cup B) \not\subseteq C \implies (A \not\subseteq C \text{ ou } B \not\subseteq C)\ ?$$

2. On suppose que l'on a les deux inclusions suivantes : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que $B \subset C$.

Exercice 2-4

Énoncer la négation de chacun des énoncés suivants. Est-ce l'énoncé ou sa négation qui est vrai ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x = |x|$ ou $x = -|x|)$.
2. $(\forall x \in \mathbb{R}, x = |x|)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, x = -|x|)$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y - x + x^2 < 0$.
4. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y - x + x^2 > 0$.

Exercice 2-5

En utilisant un raisonnement par la contraposée, montrer l'implication suivante pour tous $a,\ b \in \mathbb{R}$:

$$(\forall \varepsilon > 0,\ a \leq b + \varepsilon) \implies a \leq b.$$

Exercice 2-6

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs en n'utilisant que des symboles les assertions suivantes :

1. f s'annule ;
2. f est l'application nulle ;
3. f n'est pas une application constante ;
4. f ne prend jamais deux fois la même valeur ;
5. f s'annule au plus une fois.

Exercice 2-7

1. Soient les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Qu'observe-t-on ?
2. À partir des expressions formelles suivantes, déterminer deux fonctions u et v telles que $h = u \circ v$ en précisant leurs ensembles de départ et d'arrivée :

   (a) $h(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$; (b) $h(x) = \dfrac{1}{x+7}$; (c) $h(x) = \sqrt{3x - 1}$.

Exercice 2-8

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$. Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(f \circ f \circ f \circ f \cdots \circ f)(x)$ (où f apparaît n fois) en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2-9

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$
2. $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$
3. $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & n \end{array}$
4. $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x \end{array}$
5. $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 8x+3 \end{array}$
6. $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \{14\} \\ & x & \mapsto & 14 \end{array}$
7. $\begin{array}{llll} f: & \{17\} & \longrightarrow & \{12;17\} \\ & x & \mapsto & 17 \end{array}$
8. $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$
9. $\begin{array}{llll} f: & \{0\} & \longrightarrow & \{0\} \\ & x & \mapsto & 0 \end{array}$
10. $\begin{array}{llll} f: & \{1\} & \longrightarrow & \{1/2\} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x+1} \end{array}$
11. $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & n+1 \end{array}$
12. $\begin{array}{llll} g: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & n+1 \end{array}$
13. $\begin{array}{llll} k: & \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1}. \end{array}$

Exercice 2-10

1. On définit $f:\ \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ par $f(m,n) = mn$. Cette application est-elle ou non injective, surjective, bijective ?
2. On définit $g:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $g(k) = (k,(k+1)^2)$. Cette application est-elle ou non injective, surjective, bijective ?

Exercice 2-11

Soient I et J des parties de $\mathbb{R}$, et $f: I \to J$ définie pour tout $x \in I$ par $f(x) = x^2$.

1. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective mais pas surjective.
2. Donner des ensembles I et J tels que f soit surjective mais pas injective.
3. Donner des ensembles I et J tels que f ne soit ni injective ni surjective.
4. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective et surjective.

Exercice 2-12

1. Soit $q_1, q_2 \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Montrer que :
$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}.$$
2. On définit $f:\ \mathbb{Z}\times(\mathbb{N}\setminus\{0,1\}) \to \mathbb{Q}$ par :
$$f(p,q) = p + \frac{1}{q}.$$
Cette application est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 2-13

On définit une partie du plan par $D = \{(x,y) \in, \mathbb{R}^2 \mid -y \leq x \leq y\}$ puis une application $f:\ D \to \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x^2+y^2, 2xy)$.

1. Représenter graphiquement D.
2. (a) Montrer que si deux couples de réels (x_1,y_1) et (x_2,y_2) vérifient le système :
$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$
alors $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.
   (b) En déduire que f est injective.
3. Est-ce que f est surjective ?

Exercice 2-14

Soient E, F et G trois ensembles, et soient $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

3. Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ?
4. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
6. Si à présent $f : E \to F$ et $g : F \to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :

   (a) $g \circ f = Id_E$; (b) $f \circ g = Id_F$; (c) $f \circ f = Id_E$.

Exercice 2-15 On considère l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = n^2$.

1. Existe-t-il $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$?
2. Existe-t-il $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$?

Exercice 2-16

1. Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même, définie par :

$$f(1) = 4,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2,\ f(4) = 2$$

   (a) Déterminer $f(A)$ lorsque $A = \{1\}$, $A = \{1, 3\}$, $A = \{3, 4\}$ et $A = \emptyset$.
   (b) Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{2\}$, $B = \{1, 2\}$ et $B = \{3\}$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(B)$ lorsque $B = \{1\}$ et $B = [1, 2]$.

Exercice 2-17

Décrire (sans démonstration rigoureuse) les ensembles qui suivent.

1. $\tan(\{0\})$;
2. $\sin^{-1}(\{2\})$;
3. $\exp(]-\infty, 2])$;
4. $\exp^{-1}([-1, e])$;
5. $\ln(\mathbb{R}^{+*})$;
6. $\ln^{-1}([3, +\infty[)$.
7. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
8. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : [-1/2, 4/3] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
9. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$;
10. $(\cos_{|[0,\pi]})^{-1}([0, 1])$;
11. $(\cos_{|[3\pi,7\pi]})^{-1}([0, 1])$;
12. $\cos^{-1}([0, 1])$;

Exercice 2-18

Soient E un ensemble et f une application de E dans lui-meme telle que $f\Big(f(E)\Big) = E$. Montrer que f est surjective.

Exercice 2-19

Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) f est injective ;

ii) Pour tous A_1, A_2 parties de X, on a $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

Exercice 2-20 Montrer que chacune des applictions suivantes est bijective en explicitant sa réciproque :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x + 1$.
2. $g :]e, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(\ln(\ln x)))$.
3. $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $a(s, t) = (2s, 3t)$.
4. $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $b(s, t) = (s + t, s - t)$.
5. $F : [1, 10[\times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $F(t, n) = t \cdot 10^n$.

Exercice 2-21

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une bijection. On suppose f strictement croissante. Montrer que la bijection réciproque f^{-1} est également strictement croissante.

Exercice 2-22

Soit E, F et G trois ensembles et soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On suppose g et $g \circ f$ bijectives. En utilisant la bijection réciproque g^{-1}, montrer que f est bijective.

Exercice 2-101

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ l'application définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $f(2k) = k$ et $f(2k+1) = -k-1$.

1. Soit m un entier positif. Déterminer tous les antécédents de m.
2. Soit m un entier strictement négatif. Déterminer tous les antécédents de m.
3. L'application f est-elle une bijection ?

Exercice 2-102

Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \to J$ une application strictement croissante.

1. Montrer que f est injective. On pourra montrer la contraposée en utilisant le fait que $x_1 \neq x_2$ est équivalent à $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$.
2. Déterminer l'ensemble K tel que $f : I \to K$ soit bijective.

Exercice 2-103

Soit $f : E \to F$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\exists\, G \subset F$ telle que f est une bijection de E dans G ;

ii) f est injective.

Exercice 2-104

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. Soit y un réel. Combien y possède-t-il d'antécédents ? (On discutera selon la valeur de y).
2. f est-elle injective ? surjective ?
3. Déterminer l'ensemble $f(\mathbb{R})$.
4. (a) Soit y un réel ayant exactement deux antécédents x_1 et x_2 par f. Déterminer la valeur du produit $x_1 x_2$, puis montrer qu'un et un seul des réels x_1 et x_2 appartient à l'intervalle $[-1, 1]$.

   (b) En déduire que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 2-105

Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F. Soient également A_1 et A_2 deux parties de E, et B_1 et B_2 deux parties de F.

1. Montrer que $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

Exercice 2-106

Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F.

1. Montrer que pour toute partie A de E, on a $A \subset f^{-1}\Big(f(A)\Big)$.
2. Montrer que pour toute partie B de F, on a $f\Big(f^{-1}(B)\Big) \subset B$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E, on a $A = f^{-1}\Big(f(A)\Big)$.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F, on a $f\Big(f^{-1}(B)\Big) = B$.

Exercice 2-107

Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application. On suppose $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E$. Montrer que f est une bijection.