Feuille 4
Fonctions usuelles

I Divers

Exercice 4.1.

1. Montrer que $1+\sin(x)=\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.
2. Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.
3. Exprimer en fonction de $\tan(x)$ uniquement les fonctions

$$f_1 : x\mapsto f_1(x)=\cos^2(x)\ ;\ f_2 : x\mapsto f_2(x)=\frac{\sin^4(x)+\cos^4(x)}{\sin^4(x)-\cos^4(x)};$$

$$f_3 : x\mapsto f_3(x)=\frac{\sin^3(x)-\cos^3(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\text{ et } f_4 : x\mapsto f_4(x)=\cos^2(x)-\sin(x)\cos(x)$$

Correction exercice 4.1.

1.

$$\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(2\times\frac{x}{2}\right)=1+\sin(x)$$

2.

$$\cos(4x)=\cos(2\times 2x)=2\cos^2(2x)-1=2(2\cos^2(x)-1)^2-1$$
$$=2(4\cos^4(x)-4\cos^2(x)+1)-1=8\cos^4(x)-8\cos^2(x)+1$$

Mais ce n'est pas la seule solution.

$$\sin(4x)=\sin(2\times 2x)=2\sin(2x)\cos(2x)=4\sin(x)\cos(x)\left(\cos^2(x)-\sin^2(x)\right)$$

Mais ce n'est pas la seule solution.

3.

$$f_1(x)=\cos^2(x)=\frac{\cos^2(x)}{1}=\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)+\sin^2(x)}=\frac{1}{\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}=\frac{1}{1+\tan^2(x)}$$

$$f_2(x)=\frac{\sin^4(x)+\cos^4(x)}{\sin^4(x)-\cos^4(x)}=\frac{\cos^4(x)\left(\frac{\sin^4(x)}{\cos^4(x)}+1\right)}{\cos^4(x)\left(\frac{\sin^4(x)}{\cos^4(x)}-1\right)}=\frac{\tan^4(x)+1}{\tan^4(x)-1}$$

$$f_3(x)=\frac{\sin^3(x)-\cos^3(x)}{\sin(x)-\cos(x)}=\frac{\cos^3(x)\left(\frac{\sin^3(x)}{\cos^3(x)}-1\right)}{\cos(x)\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-1\right)}=\cos^2(x)\frac{\tan^3(x)-1}{\tan(x)-1}$$
$$=\frac{1}{1+\tan^2(x)}\frac{\tan^3(x)-1}{\tan(x)-1}=\frac{1}{1+\tan^2(x)}\frac{(\tan(x)-1)(\tan^2(x)+\tan(x)+1)}{\tan(x)-1}$$
$$=\frac{\tan^2(x)+\tan(x)+1}{1+\tan^2(x)}=\frac{1+\tan^2(x)+\tan(x)}{1+\tan^2(x)}=1+\frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

Avec la formule $a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$

Autre méthode avec la formule $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$f_3(x)=\frac{\sin^3(x)-\cos^3(x)}{\sin(x)-\cos(x)}=\frac{(\sin(x)-\cos(x))(\sin^2(x)+\cos(x)\sin(x)+\cos^2(x))}{\sin(x)-\cos(x)}$$
$$=\sin^2(x)+\cos(x)\sin(x)+\cos^2(x)=\sin^2(x)+\cos^2(x)+\cos(x)\sin(x)$$
$$=1+\cos(x)\sin(x)=1+\cos^2(x)\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=1+\frac{1}{1+\tan^2(x)}\tan(x)$$
$$=1+\frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$f_4(x)=\cos^2(x)-\sin(x)\cos(x)=\cos^2(x)\,(1-\tan(x))=\frac{1-\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

Exercice 4.2.

1. Calculer

$$\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)\qquad \text{et}\qquad \mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$$

2. A l'aide de la formule $\mathrm{ch}(a+b)=\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b)+\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$, déterminer les solutions de l'équation :

$$2\,\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)=\sqrt{3}\,\mathrm{ch}(5x)$$

Correction exercice 4.2.

1.

$$\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)=\frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)}+e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2}=\frac{e^{\ln(\sqrt{3})}+e^{-\ln(\sqrt{3})}}{2}=\frac{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}=\frac{3+1}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)=\frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)}-e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2}=\frac{e^{\ln(\sqrt{3})}-e^{-\ln(\sqrt{3})}}{2}=\frac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}=\frac{3-1}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2.

$$2\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)=\sqrt{3}\operatorname{ch}(5x)\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{ch}(x)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sh}(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}\operatorname{ch}(5x)$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)\operatorname{sh}(x)=\operatorname{ch}(5x)\Leftrightarrow \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)+x\right)$$
$$=\operatorname{ch}(5x)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\ln(3)+x=5x\\ \frac{1}{2}\ln(3)+x=-5x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=\frac{1}{2}\ln(3)\\ 6x=-\frac{1}{2}\ln(3)\end{cases}$$
$$S=\left\{\frac{1}{8}\ln(3),-\frac{1}{12}\ln(3)\right\}$$

Exercice 4.3. u et v étant deux réels, établir les formules suivantes :

$$\operatorname{ch}^2(u)+\operatorname{sh}^2(v)=\operatorname{sh}^2(u)+\operatorname{ch}^2(v)=\operatorname{ch}(u+v)\operatorname{ch}(u-v)$$
$$\operatorname{ch}^2(u)-\operatorname{ch}^2(v)=\operatorname{sh}^2(u)-\operatorname{sh}^2(v)=\operatorname{sh}(u+v)\operatorname{sh}(u-v)$$

Correction exercice 4.3. Pour tous u et v deux réels.

$$\operatorname{ch}^2(u)+\operatorname{sh}^2(v)=\left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^v-e^{-v}}{2}\right)^2=\frac{e^{2u}+2+e^{-2u}+e^{2v}-2+e^{-2v}}{4}$$
$$=\frac{e^{2u}+e^{-2u}+e^{2v}+e^{-2v}}{4}$$
$$\operatorname{sh}^2(u)+\operatorname{ch}^2(v)=\left(\frac{e^u-e^{-u}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^v+e^{-v}}{2}\right)^2=\frac{e^{2u}-2+e^{-2u}+e^{2v}+2+e^{-2v}}{4}$$
$$=\frac{e^{2u}+e^{-2u}+e^{2v}+e^{-2v}}{4}$$
$$\operatorname{ch}(u+v)\operatorname{ch}(u-v)=\frac{e^{u+v}+e^{-u-v}}{2}\times\frac{e^{u-v}-e^{-u+v}}{2}$$
$$=\frac{e^{u+v+u-v}-e^{u+v-u+v}+e^{-u-v+u-v}-e^{-u-v-u+v}}{4}$$
$$=\frac{e^{2u}+e^{-2u}+e^{2v}+e^{-2v}}{4}$$

on a bien

$$\operatorname{ch}^2(u)+\operatorname{sh}^2(v)=\operatorname{sh}^2(u)+\operatorname{ch}^2(v)=\operatorname{ch}(u+v)\operatorname{ch}(u-v)$$
$$\operatorname{ch}^2(u)-\operatorname{ch}^2(v)=\left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^v+e^{-v}}{2}\right)^2=\frac{e^{2u}+2+e^{-2u}-(e^{2v}+2+e^{-2v})}{4}$$
$$=\frac{e^{2u}+e^{-2u}-e^{2v}-e^{-2v}}{4}$$
$$\operatorname{sh}^2(u)-\operatorname{sh}^2(v)=\left(\frac{e^u-e^{-u}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^v-e^{-v}}{2}\right)^2=\frac{e^{2u}-2+e^{-2u}-(e^{2v}-2+e^{-2v})}{4}$$
$$=\frac{e^{2u}+e^{-2u}-e^{2v}-e^{-2v}}{4}$$

$$\operatorname{sh}(u+v)\operatorname{sh}(u-v)=\frac{e^{u+v}-e^{-u-v}}{2}\times\frac{e^{u-v}+e^{-u+v}}{2}$$
$$=\frac{e^{u+v+u-v}+e^{u+v-u+v}-e^{-u-v+u-v}-e^{-u-v-u+v}}{4}$$
$$=\frac{e^{2u}+e^{-2u}-e^{2v}-e^{-2v}}{4}$$

on a bien

$$\operatorname{ch}^2(u)-\operatorname{ch}^2(v)=\operatorname{sh}^2(u)-\operatorname{sh}^2(v)=\operatorname{sh}(u+v)\operatorname{sh}(u-v)$$

<u>Exercice 4.4.</u> Montrer que pour tous x et y réels distincts :

$$e^{\frac{x+y}{2}}<\frac{e^x+e^y}{2}$$

<u>Correction exercice 4.4.</u> Pour tous x et y réels distincts

$$\frac{e^x+e^y}{2}-e^{\frac{x+y}{2}}=\frac{e^x-2e^{\frac{x+y}{2}}+e^y}{2}=\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2-2e^{\frac{x}{2}}e^{\frac{y}{2}}+\left(e^{\frac{y}{2}}\right)^2}{2}=\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{\frac{y}{2}}\right)^2}{2}>0$$

car $x\neq y$

on a bien

$$e^{\frac{x+y}{2}}<\frac{e^x+e^y}{2}$$

<u>Exercice 4.5.</u> Calculer, lorsque c'est possible, la dérivée des fonctions f_i définies de la manière suivante :

$$f_1(x)=\ln|\cos(x)|\,;\;\; f_2(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\;;\;\; f_3(x)=\cos^2(3x)\,;$$
$$f_4(x)=e^{2x+1}, f_5(x)=\tan(x^2), f_6(x)=\sqrt{1-x^2}$$

<u>Correction exercice 4.5.</u>

$$f_1'(x)=-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=-\tan(x)$$
$$f_2(x)=\ln|1+x|-\ln|1-x|\Rightarrow f_2'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}$$
$$=\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}=\frac{2}{1-x^2}$$
$$f_3(x)=2\cos(3x)\times(-3\sin(3x))=-6\cos(3x)\sin(3x)$$
$$f_4'(x)=2e^{2x+1}$$
$$f_5'(x)=(1+\tan^2(x^2))2x=\frac{2x}{\cos^2(x^2)}$$
$$f_6'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 4.6. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$3\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)-3=0$$

Correction exercice 4.6.

On pose $X=e^x$

$$3\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)-3=0\Leftrightarrow 3\frac{X+\frac{1}{X}}{2}-\frac{X-\frac{1}{X}}{2}-3=0\Leftrightarrow 3(X^2+1)-(X^2-1)-6X=0\Leftrightarrow 2X^2-6X+4=0\Leftrightarrow X^2-3X+2=0\Leftrightarrow X=1\quad\text{ou}\quad X=2\Leftrightarrow x=0\quad\text{ou}\quad x=\ln(2)$$

Exercice 4.7. Discuter en fonction de la valeur du réel x de l'existence de la valeur éventuelle de la limite de x^n quand n tend vers $+\infty$.

Correction exercice 4.7.

Si $x<-1$ alors x^n n'a pas de limite mais $\lim\limits_{n\to+\infty}|x|^n=+\infty$

Si $x=-1$ alors $x^n=(-1)^n$ n'a pas de limite.

Si $|x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}x^n=0$

Si $x=1$ alors $x^n=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}x^n=1$

Si $x>1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}x^n=+\infty$

Exercice 4.8. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}(\operatorname{ch}^3(x)-\operatorname{sh}^3(x))$$
$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln(\operatorname{ch}(x)))$$

Correction exercice 4.8.

$$\begin{aligned}e^{-x}(\operatorname{ch}^3(x)-\operatorname{sh}^3(x))&=e^{-x}\left(\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^3\right)\\&=\frac{e^{-x}}{8}\left(e^{3x}+3e^x+3e^{-x}+e^{-3x}-(e^{3x}-3e^x+3e^{-x}-e^{-3x})\right)\\&=\frac{e^{-x}}{8}(6e^x+2e^{-3x})=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-4x}\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}(\operatorname{ch}^3(x))-\operatorname{sh}^3(x))=\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned}x-\ln(\operatorname{ch}(x))&=x-\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)=x-\ln\left(e^x\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)\\&=x-\ln(e^x)-\ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)=-\ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^{-2x}}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} (x - \ln(\mathrm{ch}(x))) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

Exercice 4.9. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$3\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) - 3 = 0$$

Correction exercice 4.9.

On pose $X = e^x$

$$3\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow 3\frac{X+\frac{1}{X}}{2} - \frac{X-\frac{1}{X}}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(X^2+1) - (X^2-1) - 6X = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 6X + 4 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \quad \text{ou} \quad X = 2 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln(2)$$

Exercice 4.10.

Soit sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que sh est une bijection continue et soit sh^{-1} sa bijection réciproque.
2. Calculer $(\mathrm{sh}^{-1})'$ à l'aide de la formule du cours.
3. Déterminer explicitement $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ et retrouver le résultat du 2.

Correction exercice 4.10.

1. $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ donc sh est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

   $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) > 0$ donc sh est strictement croissante

   $$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$$

   Donc sh: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection continue.

2. On rappelle que

   $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
   $$\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$$

   Par conséquent

   $$(\mathrm{sh}^{-1})'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(sh^{-1}(x))}$$

   Comme pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

   $$\mathrm{ch}^2(\alpha) - \mathrm{sh}^2(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{ch}^2(\alpha) = \mathrm{sh}^2(\alpha) + 1$$

   Et que $\mathrm{ch}(\alpha) > 0$, on $\mathrm{ch}(\alpha) = \sqrt{\mathrm{sh}^2(\alpha)+1}$, d'où

   $$\mathrm{ch}(sh^{-1}(x)) = \sqrt{\mathrm{sh}^2(\mathrm{sh}^{-1}(x)) + 1} = \sqrt{x^2+1}$$

   Et enfin

   $$(\mathrm{sh}^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

3.

$$\begin{cases} y = \operatorname{sh}(x) \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On pose $X = e^x$ et donc $e^{-x} = \frac{1}{X}$

$$\begin{cases} y = \operatorname{sh}(x) \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{X - \frac{1}{X}}{2} \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{X^2 - 1}{2X} \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2yX = X^2 - 1 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - 2yX - 1 = 0 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = 4y^2 + 4 = 4(y^2 + 1) > 0$
Et dont les racines sont

$$X_1 = \frac{2y - 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1} < 0 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{2y + 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$$

Comme $X = e^x > 0$ la seule solution possible est :

$$X = e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\begin{cases} y = \operatorname{sh}(x) \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

D'où on déduit que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

Ce qui s'écrit encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Et enfin

$$(\operatorname{sh}^{-1})'(x) = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\dfrac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Concavité, convexité, points d'inflexion

Exercice 4.11.

Soient $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$

1. Déterminer l'intersection du graphe avec l'axe des abscisses.
2. Déterminer les points où le graphe admet une tangente horizontale.
3. Montrer que f admet un point d'inflexion. Préciser la concavité de la courbe selon les valeurs de x.

Correction exercice 4.11.

1. On cherche les valeurs de x qui vérifient $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 - 3x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

   Car l'équation du second degré $x^2 - 3x + 6$ a un discriminant négatif et donc n'a pas de racine réelle. Il n'y a que le point $(0,0)$ comme intersection entre le graphe et l'axe des abscisses.
2. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 6$, et on cherche les valeurs de x qui annulent $f'(x)$, le discriminant est négatif donc la dérivée n'est jamais nulle, il n'y a donc pas de point avec une tangente horizontale.
3. $f''(x) = 6(x - 1)$, la dérivée seconde s'annule en $x = 1$ et change de signe, il y a donc un point d'inflexion en $\left(1, f(1)\right)$. Si $x < 1$ alors $f''(x) < 0$ la courbe est donc concave et si $x > 1$ alors $f''(x) > 0$ la courbe est convexe.

Exercice 4.12.

Soient $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

1. Déterminer les points où le graphe admet une tangente horizontale.
2. Montrer que f admet un point d'inflexion. Préciser la concavité de la courbe selon les valeurs de x.

Correction exercice 4.12.

1. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$, et on cherche les valeurs de x qui annulent $f'(x)$, le discriminant est
$$\Delta = 12^2 - 4 \times 3 \times 11 = 144 - 132 = 12$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 - 2\sqrt{3}}{2} = 6 - \sqrt{3} \text{ ou } x = \frac{12 + 2\sqrt{3}}{2} = 6 + \sqrt{3}$$
Il y a deux points d'intersection avec l'axe des abscisses $\left(6 - \sqrt{3}, f\left(6 - \sqrt{3}\right)\right)$ et $\left(6 + \sqrt{3}, f\left(6 + \sqrt{3}\right)\right)$
2. $f''(x) = 6(x - 2)$, la dérivée seconde s'annule en $x = 2$ et change de signe, il y a donc un point d'inflexion en $\left(2, f(2)\right)$. Si $x < 2$ alors $f''(x) < 0$ la courbe est donc concave et si $x > 2$ alors $f''(x) > 0$ la courbe est convexe.

Etudes de fonctions complètes

Exercice 4.13. On définit la fonction $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$$

1. Etudier les variations de f.
2. Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
3. Calculer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de l'expression
$$f(x) - (x + 2)$$
En déduire que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote au graphe de f.
4. Déterminer la position du graphe par rapport à l'asymptote d'équation $y = x + 2$.
5. Tracer le graphe de f.

Correction exercice 4.13.

1. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$$f'(x) = \frac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x + 3)}{(x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x - 3}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$$
$$= \frac{x(x + 2)}{(x + 1)^2}$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Donc f est croissante sur $]-\infty, -2[$, f est décroissante sur $]-2, -1[$, f est décroissante sur $]-1,0[$ et f est croissante sur $]0, +\infty[$.
2.
$$\lim_{x \to -1} (x^2 + 3x + 3) = 1$$
Donc
$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$
Et d'autre part
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty \quad et \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

3. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f(x) - (x+2) = \frac{x^2+3x+3}{x+1} - (x+2) = \frac{x^2+3x+3-(x+2)(x+1)}{x+1} = \frac{x^2+3x+3-x^2-x-2x-2}{x+1} = \frac{1}{x+1}$alors

Par conséquent

$$\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - (x+2)\big) = 0$$

La différence entre le graphe de f et la droite d'équation $y = x + 2$ tend vers 0 en $-\infty$ et $+\infty$, cela montre que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote au graphe de f.

4.

Si $x < -1$ alors $f(x) - (x+2) = \frac{1}{x+1} < 0$ donc le graphe est dessous la droite.

Si $x > -1$ alors $f(x) - (x+2) = \frac{1}{x+1} > 0$ donc le graphe est dessus la droite.

5.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-2) = -1$ et $f(0) = 3$

<u>Exercice 4.14.</u>

On note f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x$ et g la fonction définie sur $]0,1[$ par $g(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$.

1. Etudier les variations de f sur $[0,1[$ et en déduire que f est à valeurs positives.
2. Etudier les variations de g sur $]0,1[$.
3. Déterminer les limites éventuelles de $g(x)$ pour x tendant vers 0 et pour x tendant vers 1.

<u>Correction exercice 4.14.</u>

1. $0 \leq x < 1 \Rightarrow -1 < -x \leq 0 \Rightarrow 0 < 1 - x \leq 1$

Ce qui montre que f est définie, continue et dérivable sur $[0,1[$

$$\forall x \in [0,1[, f'(x) = -\ln(1-x) + (1-x) \times \frac{-1}{1-x} + 1 = -\ln(1-x)$$

Ce qui montre que $f'(x)$ est strictement négative pour $0 < x < 1$ et nulle pour $x = 0$ et donc que f est strictement croissante.

Comme $f(0) = (1-0)\ln(1-0) + 0 = \ln(1) = 0$, pour tout $x > 0$ (et $x < 1$, bien sûr)

$$f(x) > f(0) = 0$$

2. Pour tout $x \in]0,1[$

$$g'(x) = -\frac{\frac{-1}{1-x}\times x - 1 \times \ln(1-x)}{x^2} = -\frac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{(1-x)x^2} = \frac{x+(1-x)\ln(1-x)}{(1-x)x^2}$$
$$= \frac{f(x)}{(1-x)x^2}$$

Le dénominateur est strictement positif et $f(x)$ aussi donc pour tout $x > 0$ et $x < 1$, $g'(x) > 0$ sur l'intervalle $]0,1[$ donc g est strictement croissante sur cet intervalle.

3. En 1.

$$g(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$$

car $X\ln(X) \to 0$ lorsque $X \to 0$ est une limite indéterminée connue

En 0, on rappelle que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

On pose $h = -x$, alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{-x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} g(x) = 1$$

<u>Exercice 4.15.</u> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

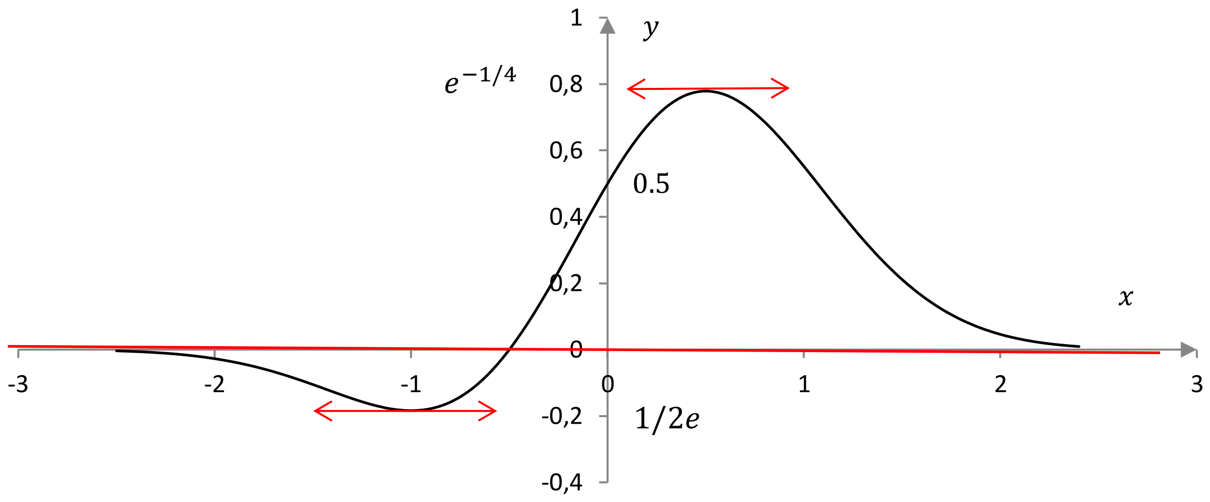
1. Déterminer les limites éventuelles de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f.
3. Tracer sommairement la courbe représentative de f.

<u>Correction exercice 4.15.</u>

1. Si $x < 0$ on pose $x^2 = X \Leftrightarrow x = -\sqrt{X}$, donc $f(x) = \left(-\sqrt{X}+\frac{1}{2}\right)e^{-X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
Si $x > 0$ on pose $x^2 = X \Leftrightarrow x = \sqrt{X}$, donc $f(x) = (\sqrt{X}+\frac{1}{2})e^{-X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
Ceci dit dans ce cas les limites sont presque évidentes.
2. $f'(x) = e^{-x^2} + \left(x+\frac{1}{2}\right)(-2x)e^{-x^2} = (-2x^2 - x + 1)e^{-x^2}$
Le polynôme $-2X^2 - X + 1$ admet $X_1 = -1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$ comme racines donc
$$-2X^2 - X + 1 = -2(X+1)\left(X-\frac{1}{2}\right)$$
par conséquent $f'(x) = -2(x+1)(x-\frac{1}{2})e^{-x^2}$
on en déduit le tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{2e}$	$\nearrow$	$e^{-\frac{1}{4}}$	$\searrow$	0

3. $\frac{-1}{2e} \approx -0{,}2$ en gros et $e^{-\frac{1}{4}} \approx 0{,}8$ en gros.



Exercice 4.16. Soit f la fonction définie par

$$f(u) = \frac{4 - 5\,\mathrm{ch}(u)}{\mathrm{sh}(u)}$$

1. Montrer que f est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Est-elle paire, impaire ?
2. Déterminer les limites éventuelles de f en $+\infty$ et en 0^+.
3. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^*$. On veillera à donner une expression très simple les points où f' s'annule.
4. Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe.

Correction exercice 4.16.

1. f est définie, continue et dérivable si et seulement si $\mathrm{sh}(u) \neq 0$, donc sur $\mathbb{R}^*$.
$$f(-u) = \frac{4 - 5\,\mathrm{ch}(-u)}{\mathrm{sh}(-u)} = \frac{4 - 5\,\mathrm{ch}(u)}{-\,\mathrm{sh}(u)} = -f(u)$$
de plus l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 donc f est impaire.
2.
$$\begin{cases} \lim\limits_{u \to 0^+} (4 - 5\,\mathrm{ch}(u)) = -1 \\ \lim\limits_{u \to 0^+} \mathrm{sh}(u) = 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim_{u \to 0^+} f(u) = -\infty$$
Limite en $+\infty$
Première méthode, on pose $X = e^u$
$$f(u) = \frac{4 - 5\frac{e^u + e^{-u}}{2}}{\frac{e^u - e^{-u}}{2}} = \frac{8 - 5\left(e^u + \frac{1}{e^u}\right)}{e^u - \frac{1}{e^u}} = \frac{8 - 5X - \frac{5}{X}}{X - \frac{1}{X}} = \frac{8X - 5X^2 - 5}{X^2 - 1} = \frac{-5X^2 + 8X - 5}{X^2 - 1}$$
$$\lim_{u \to +\infty} f(u) = \lim_{X \to +\infty} \frac{-5X^2 + 8X - 5}{X^2 - 1} = -5$$
Deuxième méthode
$$f(u) = \frac{4}{\mathrm{sh}(u)} - 5\frac{\mathrm{ch}(u)}{\mathrm{sh}(u)} = \frac{4}{\mathrm{sh}(u)} - 5\frac{1}{\mathrm{th}(u)}$$
$$\begin{cases} \lim\limits_{u \to +\infty} \frac{4}{\mathrm{sh}(u)} = 0 \\ \lim\limits_{u \to +\infty} \mathrm{th}(u) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{u \to +\infty} f(u) = -5$$
3. Pour tout $u > 0$.

$$f'(u)=\frac{-5\operatorname{sh}(u)\times\operatorname{sh}(u)-(4-5\operatorname{ch}(u))\times\operatorname{ch}(u)}{\operatorname{sh}^2(u)}=\frac{-5\operatorname{sh}^2(u)-4\operatorname{ch}(u)+5\operatorname{ch}^2(u)}{\operatorname{sh}^2(u)}$$
$$=\frac{5(\operatorname{ch}^2(u)-\operatorname{sh}^2(u))-4\operatorname{ch}(u)}{\operatorname{sh}^2(u)}=\frac{5-4\operatorname{ch}(u)}{\operatorname{sh}^2(u)}$$

On cherche la ou les valeur(s) de $u>0$ qui annule $f'(u)$ et on pose $X=e^u$

$$5-4\operatorname{ch}(u)=0\Leftrightarrow 5-4\frac{e^u+e^{-u}}{2}=0\Leftrightarrow 5-2X-\frac{2}{X}=0\Leftrightarrow -2X^2+5X-2=0$$

le discriminant vaut : $\Delta=25-4(-2)(-2)=9$

il y a donc deux solutions

$$X_1=\frac{-5-3}{-4}=2\quad\text{et}\quad X_1=\frac{-5+3}{-4}=\frac{1}{2}$$

On revient en « u »

$$u_1=\ln(2)>0\qquad\text{et}\qquad u_2=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)<0$$

ensuite comme $u\mapsto 4-5\operatorname{ch}(u)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$

$$0<u<\ln(2)\Rightarrow 4-5\operatorname{ch}(u)>4-5\operatorname{ch}(ln(2))=0\Rightarrow f'(u)>0$$
$$\ln(2)<u\Rightarrow 4-5\operatorname{ch}(\ln(2))<4-5\operatorname{ch}(u)=0\Rightarrow f'(u)<0$$

4.

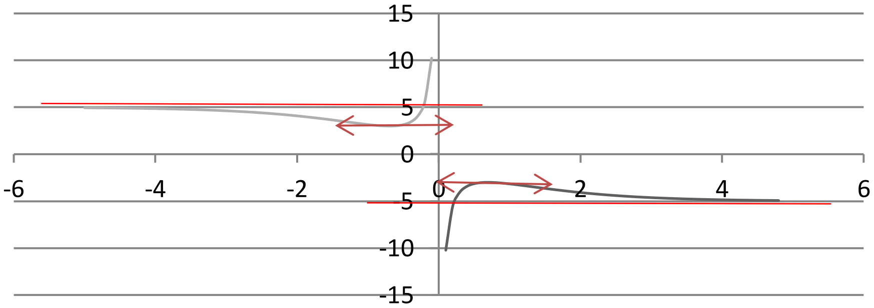
u	0		$\ln(2)$		$+\infty$
$f'(u)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(u)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\ln(2))$	$\searrow$	-5

Avec

$$f(\ln(2))=\frac{4-5\operatorname{ch}(\ln(2))}{\operatorname{sh}(\ln(2))}$$
$$\operatorname{ch}(\ln(2))=\frac{5}{4}$$
$$\operatorname{sh}(\ln(2))=\frac{e^{\ln(2)}-e^{-\ln(2)}}{2}=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$

par conséquent

$$f(\ln(2))=\frac{4-5\times\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}}=-\frac{9}{3}=-3$$



Exercice 4.17. Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=2\sin(x)+\sin(2x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, sa période et sa parité. En déduire un intervalle d'étude.
2. Calculer la dérivée de f et déterminer son signe.
3. Dresser le tableau de variation.
4. Tracer la courbe représentative de f.

Correction exercice 4.17.

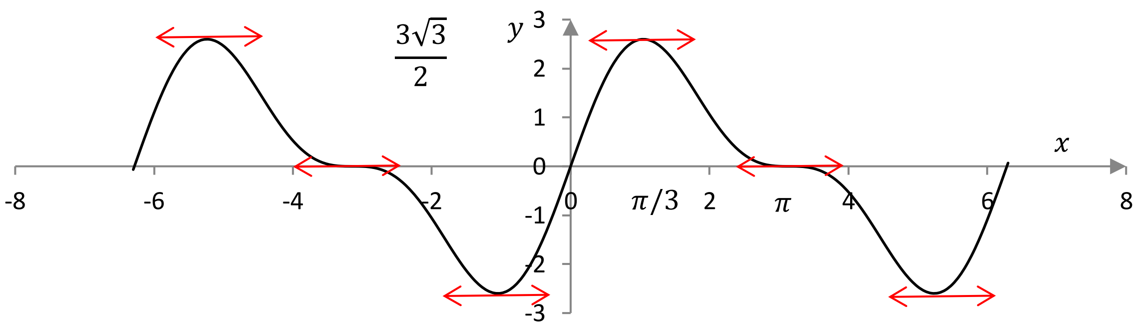
1. f est définie (continue et dérivable) sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et impaire (ce sont des évidences qu'il n'est pas nécessaire de développer), on étudiera f sur l'intervalle $[0, \pi]$, par parité on connaitra les variation de f sur $[0,2\pi]$, puis par périodicité sur $\mathbb{R}$.
2.
$$f'(x) = 2\cos(x) + 2\cos(2x) = 2(\cos(x) + 2\cos^2(x) - 1) = 2(2\cos^2(x) + \cos(x) - 1)$$
Le polynôme $2X^2 + X - 1$ admet $X_1 = -1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$ comme racine donc
$2X^2 + X - 1 = 2(X+1)(X - \frac{1}{2})$, on en déduit que $f'(x) = 4(\cos(x) + 1)\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right)$
Dressons un tableau de signe :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\cos(x) + 1$		$+$		$+$	0
$\cos(x) + \frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0

f est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.
3. On en déduit le tableau de variation de f.
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

4.



Exercice 4.18. Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$.

1. Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$. Dresser le tableau de variations de cette fonction, et en déduire qu'il existe un et un seul réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$, déteminer x_0.
2. En déduire les variations de f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Déterminer les asymptotes au graphe de f.
5. Tracer ce graphe et son asymptote en faisant figurer les tangentes remarquables.

Correction exercice 4.18.

1. g est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.
$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0 \ \text{ car } x > 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

On en déduit que g est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, donc 0 admet un unique antécédent x_0, comme $x_0 = 1$ convient, c'est le seul.

2. f est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x}\times x - 1\times \ln(x)}{x^2} = 1 - \frac{1-\ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 - (1-\ln(x))}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$$

car

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$$

n'est pas une forme indéterminée.

$$f(1) = 1 - \frac{\ln(1)}{1} = 1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

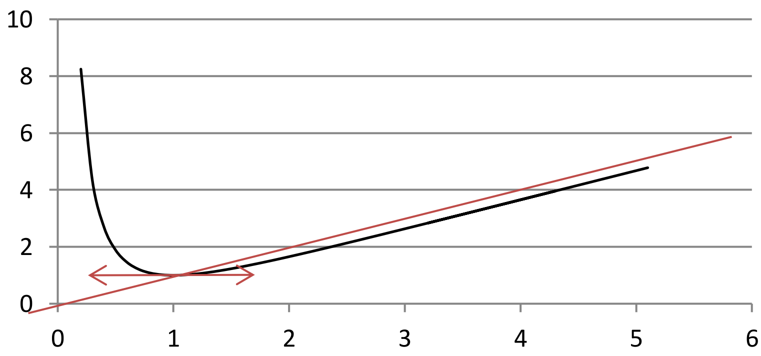
3. Voir 2.
4. Comme

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} (f(x) - x) = 0$$

Ce qui montre que la droite d'équation $y = x$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$.

5.



Et même si ce n'est pas clair sur le graphe, il y a un point d'inflexion pour $x > 1$, point qui annule la dérivée seconde.

Exercice 4.101. Etablir la formule suivante :

$$\tan(x-y) + \tan(y-z) + \tan(z-x) = \tan(x-y)\tan(y-z)\tan(z-x)$$

Où x, y, z sont trois réels pour lesquels les trois tangentes apparaissant dans la formule sont définies.
Indication : on pourra appliquer judicieusement la formule donnant $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.

Correction exercice 4.101.

$$\tan(z-x) = \tan\big((z-y)+(y-x)\big) = \frac{\tan(z-y)+\tan(y-x)}{1-\tan(z-y)\tan(y-x)}$$
$$\Leftrightarrow\ \tan(z-x)\,(1-\tan(z-y)\tan(y-x)) = \tan(z-y)+\tan(y-x)$$
$$\Leftrightarrow\ \tan(z-x)\,\big(1-(-\tan(-z+y))(-\tan(-y+x))\big) = -\tan(-z+y)-\tan(-y+x)$$
$$\Leftrightarrow\ \tan(z-x)\,(1-\tan(y-z)\tan(x-y)) = -\tan(y-z)-\tan(x-y)$$
$$\Leftrightarrow \tan(z-x)-\tan(z-x)\tan(y-z)\tan(x-y) = -\tan(y-z)-\tan(x-y)$$
$$\Leftrightarrow \tan(z-x)+\tan(y-z)+\tan(x-y) = \tan(z-x)\tan(y-z)\tan(x-y)$$

Exercice 4.102.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{8\,\mathrm{ch}(x)}{4e^x-3}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
3. Etudier les variations de f.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Tracer le graphe de f.

Correction exercice 4.102.

1. f est définie, continue et dérivable si et seulement si $4e^x-3 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x \neq \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

$$D_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right\}$$

2.

En $-\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty}(4e^x-3) = -3$$
$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{ch}(x) = +\infty$$

donc

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{8\,\mathrm{ch}(x)}{4e^x-3} = -\infty$$

en $+\infty$

On pose $X = e^x$

$$f(x) = \frac{8\,\mathrm{ch}(x)}{4e^x-3} = \frac{8\frac{X+\frac{1}{X}}{2}}{4X-3} = \frac{8(X^2+1)}{2X(4X-3)} = \frac{8X^2+8}{8X^2-6X}$$
$$\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty}\frac{8X^2+8}{8X^2-6X} = \lim_{X\to+\infty}\frac{8X^2}{8X^2} = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$$

En $\ln\left(\frac{3}{4}\right)^-$, $\mathrm{ch}\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) > 1 > 0$

$$\lim_{x\to\ln\left(\frac{3}{4}\right)^-}(4e^x-3) = 0^-$$
$$\lim_{x\to\ln\left(\frac{3}{4}\right)^-}\frac{\mathrm{ch}(x)}{4e^x-3} = -\infty$$

En $\ln\left(\frac{3}{4}\right)^{+}$, $\operatorname{ch}\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) \geq 1 > 0$

$$\lim_{x \to \ln\left(\frac{3}{4}\right)^{+}} (4e^{x} - 3) = 0^{+}$$

$$\lim_{x \to \ln\left(\frac{3}{4}\right)^{+}} \frac{\operatorname{ch}(x)}{4e^{x} - 3} = +\infty$$

3.

$$f'(x) = 8\frac{\operatorname{sh}(x)\,(4e^{x} - 3) - 4\operatorname{ch}(x)\,e^{x}}{(4e^{x} - 3)^{2}} = 8\frac{4e^{x}(\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x)) - 3\operatorname{sh}(x)}{(4e^{x} - 3)^{2}}$$

On pose $X = e^{x}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4e^{x}(\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x)) - 3\operatorname{sh}(x) = 0 \Leftrightarrow 4X\left(\frac{X - \frac{1}{X}}{2} - \frac{X + \frac{1}{X}}{2}\right) - 3\frac{X - \frac{1}{X}}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4X\big((X^{2} - 1) - (X^{2} + 1)\big) - 3(X^{2} - 1) = 0 \Leftrightarrow 8X(-2) - 3X^{2} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3X^{2} - 8X + 3 = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = (-8)^{2} + 4 \times 3 \times 3 = 64 + 36 = 100$$

les racines sont

$$X_{1} = \frac{8 - 10}{-6} = \frac{1}{3}$$

et

$$X_{2} = \frac{8 + 10}{-6} = -3$$

Or $X = e^{x} > 0$ donc $f'(x) = 0$ n'a qu'une solution $e^{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3)$

Il reste à déterminer le signe de $4e^{x}(\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x)) - 3\operatorname{sh}(x)$, cette fonction est continue et ne s'annule qu'en $-\ln(3)$, on prend une valeur simple 0, $4e^{0}(\operatorname{sh}(0) - \operatorname{ch}(0)) - 3\operatorname{sh}(0) = -4 < 0$

Donc pour tout $x < -\ln(3)$ $4e^{x}(\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x)) - 3\operatorname{sh}(x) < 0$ et pour tout $x > -\ln(3)$, $4e^{x}(\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x)) - 3\operatorname{sh}(x) > 0$, il faut quand même faire attention au fait que f n'est pas définie en $\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

Comme $\frac{1}{3} < \frac{3}{4}$ alors $\ln\left(\frac{1}{3}\right) < \ln\left(\frac{3}{4}\right)$, on déduit de tout cela que :

Pour tout $x \in \left]-\infty, \ln\left(\frac{1}{3}\right)\right[$, f est décroissante.

Pour tout $x \in \left]\ln\left(\frac{1}{3}\right), \ln\left(\frac{3}{4}\right)\right[$, f est croissante.

Pour tout $x \in \left]\ln\left(\frac{3}{4}\right), +\infty\right[$, f est croissante.

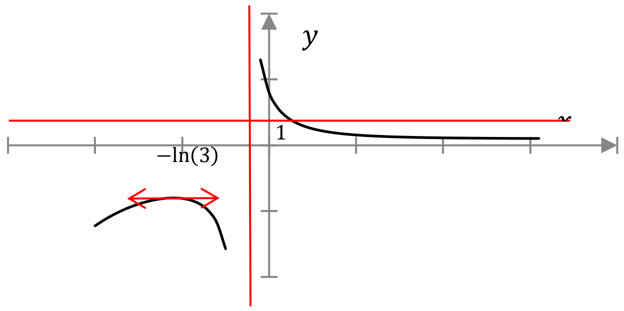
4.

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{1}{3}\right)$		$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	1

car

$$f\left(\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{8\operatorname{ch}\left(\frac{1}{3}\right)}{4e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} - 3} = 4\frac{e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} + e^{-\ln\left(\frac{1}{3}\right)}}{\frac{4}{3} - 3} = 4\frac{\frac{1}{3} + 3}{-\frac{5}{3}} = \frac{40}{-5} = -8$$

5.



Exercice 4.103.

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par :

$$f(u) = \frac{3 + 4\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}(u)}$$

1. Préciser son domaine de définition.
2. Préciser ses limites quand u tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
3. Etudier les variations de f. On veillera à fournir une expression très simple de la valeur u_0 pour laquelle $f'(u_0) = 0$ (l'expression attendue n'utilise pas de fonctions hyperboliques réciproque (Hors programme)).
4. Tracer le graphe de f.

Correction exercice 4.103.

1. $u \mapsto 3 + 4\operatorname{sh}(u)$ est définie sur $\mathbb{R}$. $\operatorname{ch}(u) \neq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ et ch est définit sur $\mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Première méthode

$$f(u) = \frac{3 + 4\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}(u)} = \frac{3}{\operatorname{ch}(u)} + 4\operatorname{th}(u)$$

$\lim\limits_{u\to+\infty} \operatorname{ch}(u) = +\infty$ donc $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{3}{\operatorname{ch}(u)} = 0$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \operatorname{th}(u) = 1$ donc $\lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = 4$

$\lim\limits_{u\to-\infty} \operatorname{ch}(u) = +\infty$ donc $\lim\limits_{u\to-\infty} \frac{3}{\operatorname{ch}(u)} = 0$ et $\lim\limits_{u\to-\infty} \operatorname{th}(u) = -1$ donc $\lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = -4$

Deuxième méthode

$$f(u) = \frac{3 + 4\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}(u)} = \frac{3 + 4\frac{e^u - e^{-u}}{2}}{\frac{e^u + e^{-u}}{2}} = \frac{6 + 4(e^u - e^{-u})}{e^u + e^{-u}} = \frac{6e^u + 4(e^{2u} - 1)}{e^{2u} + 1}$$

en multipliant le numérateur et le dénominateur par 2, puis par e^u.

On pose $X = e^u$,

$$f(u) = \frac{6X + 4(X^2 - 1)}{X^2 + 1} = \frac{4X^2 + 6X - 4}{X^2 + 1}$$

si $u \to +\infty$ alors $X \to +\infty$

$$\lim_{u\to+\infty} f(u) = \lim_{X\to+\infty} \frac{4X^2 + 6X - 4}{X^2 + 1} = \lim_{X\to+\infty} \frac{4X^2}{X^2} = 4$$

si $u \to -\infty$ alors $X \to 0$

$$\lim_{u\to-\infty} f(u) = \lim_{X\to 0} \frac{4X^2 + 6X - 4}{X^2 + 1} = -4$$

3.

$$f'(u) = \frac{4\operatorname{ch}(u)\operatorname{ch}(u) - (3 + 4\operatorname{sh}(u))\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}^2(u)} = \frac{4\operatorname{ch}^2(u) - 3\operatorname{sh}(u) - 4\operatorname{sh}^2(u)}{\operatorname{ch}^2(u)}$$
$$= \frac{4(\operatorname{ch}^2(u) - \operatorname{sh}^2(u)) - 3\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}^2(u)} = \frac{4 - 3\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}^2(u)}$$

$$\mathrm{sh}(u_0) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{e^{u_0} - e^{-u_0}}{2} = \frac{4}{3}$$

On pose $X_0 = e^{u_0}$

$$\mathrm{sh}(u_0) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{X_0 - \frac{1}{X_0}}{2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow X_0 - \frac{1}{X_0} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow X_0^2 - 1 = \frac{8}{3}X_0 \Leftrightarrow X_0^2 - \frac{8}{3}X_0 - 1 = 0$$

le discriminant vaut

$$\Delta = \frac{64}{9} + 4 = \frac{100}{9} = \left(\frac{10}{3}\right)^2$$

$$X_{0,1} = \frac{\frac{8}{3} - \frac{10}{3}}{2} = -\frac{1}{3} < 0$$

$$X_{0,2} = \frac{\frac{8}{3} + \frac{10}{3}}{2} = 3$$

donc

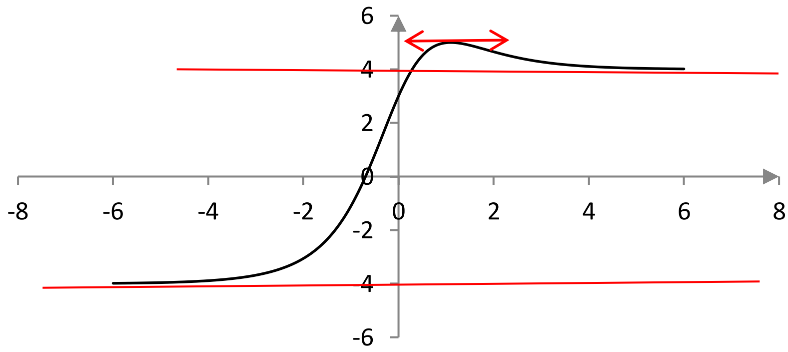
$$e^{u_0} = 3 \Leftrightarrow u_0 = \ln(3)$$

u	$-\infty$		$\ln(3)$		$+\infty$
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$	-4	$\nearrow$	5	$\searrow$	4

$$\mathrm{ch}(\ln(3)) = \frac{e^{\ln(3)} + e^{-\ln(3)}}{2} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{3}$$

$$f(\ln(3)) = \frac{3 + 4 \times \frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = 5$$

4. Graphe de $v = f(u)$



Exercice 4.104. Soit f la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^2(x) + \frac{1}{2}\cos(x)$$

1. Etudier la parité de f et sa périodicité, en déduire un intervalle d'étude.
2. Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(x_0) = \frac{1}{4}$
3. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
4. Dresser le tableau de variation de f et tracer le graphe de f.

Correction exercice 4.104.

1. f est paire et 2π périodique, on étudie f sur $[0, \pi]$

2. $f'(x) = 2\cos(x)\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(x) = 2\sin(x)\left(\cos(x) - \frac{1}{4}\right)$

$$\forall x \in [0, \pi], \qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \cos(x) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Il y a deux valeurs qui annulent $\sin(x)$ dans $[0, \pi]$, ce sont 0 et π.

Pour $x \in [0, \pi]$, la fonction $\cos: [0, \pi] \mapsto [-1,1]$ étant strictement décroissante, il s'agit d'une bijection, $\frac{1}{4}$ admet un unique antécédent x_0, sur le signe de $\cos(x) - \frac{1}{4}$ est positif sur $[0, x_0]$ et négatif sur $[x_0, \pi]$.

x	0		x_0		π
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	0
$\cos(x) - \frac{1}{4}$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0

f est croissante sur $[0, x_0]$

f est décroissante sur $[x_0, \pi]$

3.

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

$$f(x_0) = \sin^2(x_0) + \frac{1}{2}\cos(x_0) = 1 - \cos^2(x_0) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{16 - 1 + 2}{16} = \frac{17}{16}$$

$$f(\pi) = -\frac{1}{2}$$

x	0		x_0		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{17}{16}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$