# Feuille 5
# Nombres complexes

Exercice 5-1 Soit $f: \mathbb{C} \setminus \{0, -3\} \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z(z+3)}$$

Calculer $f(1-i)$ et $f(1+i)$

Exercice 5-2 Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe

$$z = \frac{1 + im}{2m + i(m^2 - 1)}, \quad m \in \mathbb{R}$$

Exercice 5-3

Calculer le module et un argument de

$$z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$$

Exercice 5-4

Calculer le module et un argument de

$$u = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad v = 1 - i$$

En déduire le module et un argument de $\frac{u}{v}$.

Exercice 5-5

Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que :

1. $|1 - z| \leq \frac{1}{2}$
2. $\mathcal{R}e(1 - z) \leq \frac{1}{2}$
3. $\mathcal{R}e(iz) \leq \frac{1}{2}$
4. $\left|1 - \frac{1}{z}\right|^2 = 2$
5. $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2$
6. $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2$

Exercice 5-6

Soit $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

1. Calculer $z^2$, puis déterminer le module et un argument de $z^2$, puis écrire $z^2$ sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de $z$.
3. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 5-7

1. Déterminer la forme trigonométrique de $(1+i)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Utiliser la formule de Moivre).
2. En déduire une expression simple de $(1+i)^n + (1-i)^n$.

Exercice 5-8

1. Calculer les racines carrées des nombres complexes

$$a)\ z_1 = 7 + 24i \qquad b)\ z_2 = 9 + 40i \qquad c)\ z_3 = 1 + i$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$a)\ z^2 = -2\sqrt{3} + 2i \qquad b)\ z^2 = 3 - 4i$$

Exercice 5-9 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$
2. $2z^2 + (5 + i)z + 2 + 2i = 0$
3. $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$
4. $z^3 + 3z - 2i = 0$
5. $(1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z - 5i + 10 = 0$

Exercice 5-10 Pour rappel : Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement $n$ nombres complexes $\omega$ vérifiant $\omega^n = z$

Ces nombres sont appelés les $n$ racines $n$-ième de $z$.

1. Représenter dans le plan complexes $\mathbb{C}$ les 6 racines 6-ième de 1 et les 4 racines quatrième de $-1$.
2. Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer les $n - 1$ racines du polynôme complexe $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$.

Exercice 5-11

1. Déterminer les racines cubiques de 1
2. On note $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
3. Exprimer toutes les racines cubiques de $1$ en fonction de $j$.

Exercice 5-12

1. Donner les solutions complexes de $z^4 = 1$.
2. Résoudre $z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. Résoudre $z^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Exercice 5-13 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^5 - z = 0$
2. $27(z - 1)^6 + (z + 1)^6 = 0$
3. $\bar{z}^7 = \frac{1}{z^2}$
4. $z^6 - (3 + 2i)z^3 + 2 + 2i = 0$

Exercice 5-14 Sachant qu'elle admet une racine réelle, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i = 0$$

Exercice 5-15

Montrer que

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

En déduire que

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'|$$

Exercice 5-16 Soient $z, \omega \in \mathbb{C}$. Etablir la relation

$$|z + \omega|^2 + |z - \omega|^2 = 2(|z|^2 + |\omega|^2)$$

Et en donner une interprétation géométrique.

Exercice 5-17 Soit $x \in \mathbb{R}$

1. Calculer $\cos(3x)$ (resp. $\sin(3x)$) en fonction de $\cos(x)$ (resp. de $\sin(x)$).
2. Linéariser $\sin^4(x)$ puis $\cos(x)\sin^4(x)$

Exercice 5-18 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \cos(k\theta), \quad V_n = \sum_{k=0}^{k=n} \sin(k\theta)$$

Exercice 5-19 Soit $c \in \mathbb{C}$ avec $|c| < 1$.

1. Montrer que $|z + c| \leq |1 + \overline{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$.
   Soient $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ le disque unité et $C = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité.
2. Montrer que l'application
$$f: D \to D$$
$$z \longmapsto \frac{z + c}{1 + \overline{c}z}$$
   Est une bijection pour laquelle $f(C) = C$.

Exercice 5-20 Donner les applications de $\mathbb{C}$ qui représentent les transformations du plan suivantes :

1. La translation du vecteur d'affixe $-2 + i$.
2. La symétrie centrale du centre $i$.
3. La rotation d'angle $\pi/6$ et de centre 1.

---

Exercice 5-100

Soit $z = \frac{3}{\sqrt{3}+i}$, calculer $z^4$.

Exercice 5-101

Soit $(E)$ l'équation

$$z^4 - 3z^3 + (2 - i)z^2 + 3z - 3 + i = 0$$

1. Montrer que $(E)$ admet des racines réelles.
2. Résoudre $(E)$.

Exercice 5-102

1. Déterminer les quatre nombres complexes $a, b, c, d$ différents de 1, qui sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^5 = 1$.
2. Montrer, pour tout nombre complexe $z$, l'égalité :
$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = (z - a)(z - b)(z - c)(z - d)$$

Exercice 5-103

Soit $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

4. Calculer $z^2$, puis déterminer le module et un argument de $z^2$, puis écrire $z^2$ sous forme trigonométrique.
5. En déduire le module et un argument de $z$.
6. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 5-104

Soit $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z(1 - z)$

1. Déterminer les points fixes de $f$ c'est-à-dire résoudre $f(z) = z$.
2. Montrer que si $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ alors $\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$

Indication : $z(1-z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)+\frac{1}{4}$

Exercice 5-105

1. Résoudre $z^3 = -2+2i$
2. Résoudre $z^3 = -8i$
3. Résoudre

$$\frac{1}{2}z^6 + (1+3i)z^3 + 8 + 8i = 0$$

On rappelle que $\sqrt{676} = 26$.

Exercice 5-106 Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\cos^2(x)\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(x)$.
2. Linéariser $\cos^4(x)$.

Exercice 5-107

1. Identifier les transformations dans le plan complexe les transformations suivantes :
   a. $f_1 : z \to z + 3 - 2i$
   b. $f_2 : z \to e^{i\frac{2\pi}{7}} z$
   c. $f_3 : z \to e^{i\frac{2\pi}{3}} z - 1$
   d. $f_4 : z \to 3z - 5 + i$
2. Donner les applications qui représentent dans le plan complexe les transformations suivantes :
   a. La translation de vecteur d'affixe $-2+i$
   b. La symétrie de centre $i$.
   c. La rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre 1.
   d. L'homothétie de rapport 3 et de centre $1+2i$.

Exercice 5-108

Soit $h$ une homothétie de rapport $k$ et $h'$ une homothétie de rapport $k'$ et de centres respectifs $\Omega$, d'affixe $\omega$, et $\Omega'$, d'affixe $\omega'$.

1. Soit $t$ une translation de vecteur $\vec{u}$. Montrer que les composés $h \circ t$ et $t \circ h$ sont des homothéties de rapport $k$.
2. Si $kk' \neq 1$, montrer que $h \circ h'$ est une homothétie de rapport $kk'$ et que les centres de $h$, $h'$ et $h \circ h'$ sont alignés.
3. Si $kk' = 1$, montrer que $h \circ h'$ est une translation.

Exercice 5-109

On rappelle que

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}; \quad j^2 = \bar{j} \quad \text{et que} \quad j^3 = 1$$

Soit $r$ une transformation du plan qui a un point $M$ associe le point $M'$ d'affixe $M' = r(M)$ d'affixe $z' = -j^2 z + 1 + j^2$

Soit $r'$ une transformation du plan qui a un point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M' = r'(M)$ d'affixe $z' = iz + 1 - i$

1. Montrer que $r$ est une rotation du plan dont on donnera l'affixe du centre $\Omega$ et l'angle de la rotation.
2. Montrer que $r'$ est une rotation du plan dont on donnera l'affixe du centre $\Omega'$ et l'angle de la rotation.
3. Calculer l'affixe $z''$ du point $M'' = r \circ r'(M)$, où $M$ est un point d'affixe $z$. Que peut-on en déduire de $r \circ r'$ ?