Correction Feuille 6 : Suites réelles

Exercice 6-1
1.

$$u_n = \frac{n+2}{2n-1} = \frac{n(1+\frac{2}{n})}{n(2-\frac{1}{n})} = \frac{1+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}$$

or la $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{2}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-\dfrac{1}{n} = 2$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

2.

$$u_n = \frac{3n^2-2n+3}{n^3-1} = \frac{n^2(3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2})}{n^3(1-\frac{1}{n^3})} = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}}\right)$$

or le terme de gauche tend vers 0 et le terme de droite tend vers 3. Comme ce n'est pas une forme indéterminée, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

3.

$$u_n = \frac{3n^2-5}{n+4} = \frac{n^2(3-\frac{5}{n^2})}{n(1+\frac{4}{n})} = (n)\left(\frac{3-\frac{5}{n^2}}{1+\frac{4}{n}}\right)$$

or le terme de gauche tend vers $+\infty$ et le terme de droite tend vers 3. Comme ce n'est pas une forme indéterminée, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

4.

$$u_n = \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n(1+\frac{2}{n})}}{\sqrt{n(1-\frac{1}{n})}} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{n}\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

5.

$$u_n = \frac{\sqrt{n+5}+n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n(1+\frac{\sqrt{n+5}}{n})}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}} = \frac{n(1+\sqrt{\frac{n+5}{n^2}})}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

Rq : au passage, $n = \sqrt{n^2}$ car n est positif

$$u_n = \frac{n(1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}})}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

or le numérateur tend vers 1, le dénominateur tend vers 1. Comme ce n'est pas une forme indéterminée, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.$$

6.

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

donc tend vers 0.
7.Par l'absurde ! Supposons que la suite $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite l_1. Or on a la formule de trigo suivante

$$\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1).$$

En particulier, si la suite $(\sin(n))_n$ converge alors la suite $(\cos(n))_n$ converge (vers l_2) car $\sin(1) \neq 0$. On en déduit que la suite $(e^{in})_n$ converge vers λ $(= l_1 + il_2)$. Or

$$e^{i(n+1)} = e^{in}e^{i}$$

et quand on prend la limite on a

$$\lambda = \lambda e^{i} \Rightarrow \lambda = 0$$

impossible car $|e^{in}| = 1$... Donc la suite $(\sin(n))_n$ n'a pas de limite.
8. On a

$$-1 \leq \sin(n) \leq +1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \leq \frac{+1}{\sqrt{n}}$$

or

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{+1}{\sqrt{n}} = 0$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} = 0.$$

9. On a

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

or

$$\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1 + (1/n))}{(1/n)} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$$

en posant $h = 1/n$. De plus $\ln(1) = 0$, donc on peut écrire

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = (\ln)'(1) = 1$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \exp(1)(= e^1 = e).$$

10. On a

$$u_n = \frac{n-(-1)^n}{2n+(-1)^n} = \frac{n(1-\frac{(-1)^n}{n})}{n(2+\frac{(-1)^n}{n})} = \frac{1-\frac{(-1)^n}{n}}{2+\frac{(-1)^n}{n}}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

11. On a

$$u_n = \frac{3^n-2^n}{2^n-3^n} = (-1)\frac{3^n-2^n}{3^n-2^n} = -1$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite constante égale à -1, et converge donc vers -1.
12. On a

$$u_n = \frac{2^n}{n^{100}} = \frac{\exp(n\ln(2))}{\exp(100\ln(n))} = \exp(n\ln(2) - 100\ln(n)) = \exp\left(n\left(\ln(2) - 100\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$$

or on sait que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(2) - 100\frac{\ln(n)}{n} = \ln(2) \neq 0, > 0$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Exercice 6-2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

1. Montrons que la suite (u_n) est croissante :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \ldots + \frac{1}{2(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{2(n+1) + 2n+1 - 2(2n+1)}{(2n+1)2(n+1)} \\
&= \frac{2n+2+2n+1-4n-2}{(2n+1)2(n+1)} \\
&= \frac{1}{(2n+1)2(n+1)}
\end{aligned}$$

donc

$$u_{n+1} - u_n > 0 \quad\Rightarrow\quad u_{n+1} > u_n$$

on en déduit que la suite (u_n) est croissante.

2. Dans la définition de (u_n), on remarque que le terme le plus grand est $\frac{1}{n+1}$ et le terme le plus petit est $\frac{1}{2n}$. De plus, u_n est défini comme la somme de n termes. On en déduit l'encadrement

$$\begin{aligned} n\left(\frac{1}{2n}\right) < u_n < n\left(\frac{1}{n+1}\right) \\ \Rightarrow \frac{1}{2} < u_n < \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} < 1 \end{aligned}$$

et donc $\frac{1}{2} < u_n < 1$.

Comme la suite est croissante et majorée, elle converge (cf cours) vers une limite l, et cette limite vérifie

$$\frac{1}{2} \leq l \leq 1.$$

3. Soit $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ une suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par l'absurde, supposons que (v_n) converge vers μ. Alors

$$v_{2n} = v_n + u_n.$$

En prenant la limite on obtient $\mu = \mu + l \Rightarrow l = 0$. Impossible vu l'encadrement de l dans la question 2. On en déduit que (v_n) n'a pas de limite fini. Or elle est croissante, donc $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 6-3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite défini par $u_0 = 8$ et la relation de récurrence $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. On pose $v_n = u_n + a$. On a

$$\begin{aligned} v_n &= u_n + a = \left(\frac{1}{2}u_{n-1} + 3\right) + a = \frac{1}{2}(u_{n-1} + a - a) + 3 + a \\ &= \frac{1}{2}v_{n-1} - \frac{a}{2} + 3 + a = \frac{1}{2}v_{n-1} + 3 + \frac{a}{2} \end{aligned}$$

D'où $v_n = \frac{1}{2}v_{n-1} + 3 + \frac{a}{2}$.

2. La suite est géométrique si elle est de la forme $v_n = qv_{n-1}$. Il faut donc que a vérifie

$$3 + \frac{a}{2} = 0 \Leftrightarrow a = -6.$$

3. Dans ce cas $v_n = (1/2)^n v_0 = (1/2)^n(u_0 - 6) = 2(1/2)^n$.

4. On obtient alors $u_n = v_n - a = 2(1/2)^n + 6$. Donc comme $(1/2)^n \to 0$ quand $n \to +\infty$, on en déduit que u_n tend vers 6.

IV $u_0 = 1$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$

1) $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 2} = \left(\frac{u_n+8}{2u_n+1} - 2\right) \times \frac{1}{\frac{u_n+8}{2u_n+1} + 2}$$

$$= \frac{u_n + 8 - 2(2u_n+1)}{u_n + 8 + 2(2u_n+1)}$$

$$= \frac{-3u_n + 6}{5u_n + 10}$$

$$= \frac{-3}{5} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$

$$v_{n+1} = -\frac{3}{5} v_n$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{-3}{5}$.

2) On en déduit que $v_n = \left(\frac{-3}{5}\right)^n \times v_0 = \left(\frac{-3}{5}\right)^n \frac{u_0 - 2}{u_0 + 2} = \left(\frac{-3}{5}\right)^n \frac{1-2}{1+2} = \frac{-1}{3}\left(\frac{-3}{5}\right)^n$

$$v_n = \frac{-1}{3} \times \left(\frac{-3}{5}\right)^n$$

3) Ainsi $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$ donc $v_n(u_n + 2) = u_n - 2 \iff v_n u_n - u_n = -2v_n - 2$

$\iff u_n(v_n - 1) = -2(v_n + 1)$

$\iff u_n = \dfrac{-2(v_n+1)}{v_n - 1}$

Donc $$u_n = -\frac{2 \times \left[\left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{-3}{5}\right)^n + 1\right]}{-\frac{1}{3} \times \left(\frac{-3}{5}\right)^n - 1}$$

4) Comme $-1 < \frac{-3}{5} < 1$ alors $\left(-\frac{3}{5}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Ainsi $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{-3}{5}\right)^n + 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{-3}{5}\right)^n - 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1$

D'où $$-\frac{2\left[\left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{-3}{5}\right)^n + 1\right]}{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{-3}{5}\right)^n - 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\frac{2}{-1} = 2.$$

IV $U_0=2 \quad u_{n+1}=\sqrt{2u_n-1}$

1) Par récurrence : Posons P_n := " $u_n > 1$ ".

. Initialisation : On a pour $n=0$ $\quad u_0=2>1$.
Donc P_0 est vraie.

. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie et montrons P_{n+1} :

$$\text{On a } u_{n+1}=\sqrt{2u_n-1} \underset{\uparrow}{>} \sqrt{2\times 1-1} = \sqrt{1}=1$$

Par hypothèse de récurrence $u_n>1$

Donc $u_{n+1}>1$,
Ainsi P_{n+1} est vraie et donc P_n est héréditaire.

. Conclusion : Comme P_0 est vrai et que P_n est héréditaire alors P_n est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1.

2) $$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n-1}-u_n = \frac{\left(\sqrt{2u_n-1}-u_n\right)\left(\sqrt{2u_n-1}+u_n\right)}{\sqrt{2u_n-1}+u_n}$$

$$= \frac{2u_n-1-u_n^2}{\sqrt{2u_n-1}+u_n} = -\frac{u_n^2-2u_n+1}{\sqrt{2u_n-1}+u_n} = -\frac{(u_n-1)^2}{\sqrt{2u_n-1}+u_n} < 0$$

Donc $u_{n+1}-u_n<0$, ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3) Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et est minorée par 1 alors elle converge vers une limite que l'on note ℓ.
La limite ℓ vérifie $\quad \ell=\sqrt{2\ell-1}$ et $\ell \geq 1 \geq 0$
Donc $\quad \ell=\sqrt{2\ell-1} \iff \ell^2=2\ell-1 \iff \ell^2-2\ell+1=0 \iff (\ell-1)^2=0 \iff \ell=1$

VI $u_0 = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}$

1) Par récurrence : posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ P_n := " $0 \leq u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ "

. Initialisation : pour $n=0$ on a bien $u_0 = 1 \in \left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$
Donc P_0 est vraie.

. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons P_n vraie, montrons que P_{n+1} est vraie.

On a $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

. Ainsi comme $u_n \geq 0$ alors $u_{n+1} \geq \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1 \geq 0$.

. De plus $u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ alors $u_{n+1} \leq \sqrt{1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Donc $u_{n+1} \in \left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

Donc P_{n+1} est vraie, d'où P_n est héréditaire.

. Conclusion : Comme P_0 est vraie et P_n héréditaire alors P_n est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq 2$.

2) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{1+u_n} - u_n = \frac{\left(\sqrt{1+u_n} - u_n\right)\left(\sqrt{1+u_n} + u_n\right)}{\sqrt{1+u_n} + u_n} = \frac{1 + u_n - u_n^2}{\sqrt{1+u_n} + u_n}$

$$= - \frac{\left(u_n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(u_n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)}{\sqrt{1+u_n} + u_n}$$

Or $u_n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \leq 0$ et $u_n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \geq 0$

Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

3) Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée alors elle converge vers une limite que l'on note ℓ.

La limite vérifie $\ell = \sqrt{1+\ell}$, $\ell \geq 0$ Donc est racine de polynôme $X^2 - 1 - X$
$= \left(X - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(X - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$

Or seul $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est positif donc $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

VII

1) $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + 5 \quad u_0 = 3$

Montrer par récurrence que $u_n \leq 6$.

Déduire $(u_n)_n$ croissante $\left(u_{n+1} - u_n = 5 - \frac{5}{6}u_n = \frac{5}{6}(6 - u_n) \geq 0 \right)$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée donc converge vers une limite notée ℓ.

Cette limite vérifie $\ell = \frac{1}{6}\ell + 5$

D'où $5\ell = 5\times 6$ donc $\ell = 6$.

2) $u_{n+1} = -2u_n + 1 \quad u_0 = 0$

$u_0 = 0 \quad u_1 = 1 \quad u_2 = -2+1 = -1 \quad u_3 = -2(-1)+1 = 3 \quad u_4 = -2\times 3+1 = -5. \quad u_5 = -2(-5)+1 = 11$

Montrer pour tout $n \geq 1$ on a $|u_{n+1}| \geq 2|u_n| - 1$.

Puis par récurrence montrer que $|u_n| \geq 2^{n-3} + 1$ pour tout $n \geq 3$.

En déduire que $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et que u_n change de signe pour tout n.

3) $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \quad u_0 = 8$

. Montrer que $u_n \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ pour tout $n \geq 0$

. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4) $u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n} \quad u_0 = 2$

. Montrer que $2 \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \geq 0$.

. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est 4.

5) $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{9} \quad u_0 = 0$.

. Montrer que $u_n \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ pour tout $n \geq 0$.

. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est $\frac{1}{3}$.

6) $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \quad u_0 = 2$

. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.

VIII

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $U_0 \in [0,1]$

$$U_n = \frac{3 - U_{n-1}^2}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1) On considère la fonction $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{2}$

a) Mq f est décroissante sur $[0,+\infty[$.

On a $f'(x) = -x$ donc $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0,+\infty[$; ainsi f est décroissante sur $[0,+\infty$

b) Soit $x \in [0,\sqrt{3}]$

Alors $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ x \leq \sqrt{3}}}{\geq} \dfrac{3 - (\sqrt{3})^2}{2} = 0$

et $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ x \geq 0}}{\leq} \dfrac{3 - 0}{2} = \dfrac{3}{2} \leq \sqrt{3}$

Ainsi $f(x) \in [0,\sqrt{3}]$. D'où l'intervalle $[0,\sqrt{3}]$ est laissé stable par f.

c) Si ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ alors ℓ est racine de polynôme $\dfrac{3 - x^2}{2} - x$.

On a $\dfrac{3 - x^2}{2} - x = -\dfrac{x^2 + 2x - 3}{2}$

Le discriminant du polynôme $x^2 + 2x - 3$ est $\Delta = 4 - 4\times(-3) = 16 = 4^2$

D'où les racines sont $x_1 = \dfrac{-2 + 4}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-2 - 4}{2} = -3$

Ainsi $1 \in [0,+\infty[$ vérifie bien $f(1) = 1$.

d) On note $I_1 = [0,1]$ et $I_2 = [1,\sqrt{3}]$.

* Mq $f(I_1) \subset I_2$:

Soit $x \in I_1 = [0,1]$ alors $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ x \leq 1}}{\geq} \dfrac{3 - 1}{2} = 1$ de plus $I_1 \subset [0,\sqrt{3}]$ on a directement $f(x) \leq \sqrt{3}$. D'où $f(I_1) \subset [1,\sqrt{3}] = I_2$.

* Mq $f(I_2) \subset I_1$.

Soit $x \in I_2$ On a déjà $f(x) \geq 0$. de plus $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ x \geq 1}}{\leq} \dfrac{3 - 1}{2} = 1$

Donc $f(x) \in I$ ainsi $f(I_2) \subset [0,1] = I_1$.

---

e) Si $x \in [0,\sqrt{3}]$ alors $(f\circ f(x))' = \underbrace{f'(x)}_{\leq 0} \times f'(f(x))$.

Comme $f(x) \in [0,\sqrt{3}]$ alors $f'(f(x)) \leq 0$ donc $(f\circ f'(x)) \geq 0$ pour tout $x \in [0,\sqrt{3}]$.

Ainsi $f\circ f$ est croissante sur $[0,\sqrt{3}]$.

Puis $f\circ f(I_1) \subset f(I_2) \subset I_1$ et $f\circ f(I_2) \subset f(I_1) \subset I_2$.

Donc $f\circ f$ laisse stable les intervalles I_1 et I_2.

VIII suite :

2) a) Comme $f\circ f$ laisse stable I_1 et que $u_0 \in I_1$ et que $u_{2n} = f\circ f(u_{2(n-1)})$, alors pour tout $n \geq 0$ $u_{2n} \in I_1$.

Par récurrence posons P_n : " $u_{2n} \leq u_{2(n+1)}$ ".

I. On a $u_0 \in [0,1]$.

$$f(u_0) = \frac{3-u_0^2}{2}$$

$$f\circ f(u_0) = \frac{3-\left(\frac{3-u_0^2}{2}\right)^2}{2} = \frac{3 - \frac{(9-6u_0^2+u_0^4)}{4}}{2} = \frac{12-9+6u_0^2-u_0^4}{8}$$

$$= \frac{-1}{8} \times (u_0^4 - 6u_0^2 - 3)$$

D'où $f\circ f(u_0) - u_0 = \frac{-1}{8}(u_0^4 - 6u_0^2 + 8u_0 - 3) = \frac{-1}{8}(u_0-1)(u_0^3+u_0^2-5u_0+3)$

$= \frac{-1}{8}(u_0-1)^2(u_0^2+2u_0-3) = -\frac{1}{8}(u_0-1)^3(u_0+3)$.

Or $u_0 \in [0,1]$ donc $u_0+3 \geq 0$ et $(u_0-1) \leq 0$ donc $-\frac{1}{8}(u_0-1)^3 \geq 0$.

Ainsi $f\circ f(u_0) - u_0 \geq 0$ donc $u_2 \geq u_0$.

H : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $P_0 \dots P_n$ vraies. Montrons P_{n+1} :

On a par hypothèse P_n : $u_{2n} \leq u_{2(n+1)}$

Ainsi comme $f\circ f$ est croissante $f\circ f(u_{2n}) \leq f\circ f(u_{2(n+1)})$

D'où $u_{2(n+1)} \leq u_{2(n+2)}$.

Donc P_{n+1} est vraie. Ainsi P_n est héréditaire.

C : Comme P_0 est vraie et P_n héréditaire alors P_n est vraie pour tout $n \geq 0$.

Ainsi $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b) Pour montrer que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante il suffit de voir que pour tout $n \geq 0$

on a $u_{2n} \leq u_{2(n+1)}$

Donc $f(u_{2n}) \geq f(u_{2(n+1)})$ car f est décroissante.

D'où $u_{2n+1} \geq u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3}$

Ainsi $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3) On a $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée donc converge vers une limite que l'on note $l \in [0,1]$.

l vérifie $f\circ f(l) = l$. Or $f\circ f(l) - l = -\frac{1}{8}(l^2-1)(l^2+3)$ Donc $l^2 = 1$ (car $l \in [0,1]$)

Ainsi $l = 1$.

De plus $u_{2n+1} = f(u_{2n})$ donc $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(l) = l$ ($f(1) = 1$).

Ainsi les suites des termes paires et impaires convergent vers la même limite 1, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

IX

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{1+u_n} = 0$.

Mq $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

On note $w_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.

Remarque $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc w_n est bien définie à partir d'un certain rang.

On a alors $w_n(1+u_n) = u_n$

Donc $w_n = u_n - w_n u_n = u_n(1-w_n)$

Ainsi $u_n = \frac{w_n}{1-w_n}$

Or $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $1-w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

X

1) Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$ alors $w_n = u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$

2) Si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas ou $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas (c'est la contraposée de 1)

3) $u_n = n$ $v_n = -n$

On a $u_n \longrightarrow +\infty$, $v_n \longrightarrow -\infty$ mais $w_n = u_n + v_n = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

XI

$w_n = u_n^2 + u_n v_n + v_n^2$

1) On a $w_n = \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 - \frac{1}{4}v_n^2 + v_n^2 = \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 + \frac{3}{4}v_n^2$

2) On a $0 \leq \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 \leq w_n$ et $0 \leq \frac{3}{4}v_n^2 \leq w_n$

Or $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc par le théorème des gendarmes $\left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2$ et $\frac{3}{4}v_n^2$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3) Comme $\frac{3}{4}v_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $v_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ainsi $\left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $u_n + \frac{1}{2}v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi $u_n = \underbrace{u_n + \frac{1}{2}v_n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \underbrace{- \frac{1}{2}v_n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

XII $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
Montrer que (u_n) est aussi convergente.

Comme $u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ alors $u_{2(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

D'où comme $u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_{2(n+1)}$ par croissance de (u_n), on déduit par le théorème des gendarmes que u_{2n+1} tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.
Ainsi la suite des termes pairs et la suites des termes impairs ont même limite, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

XIII $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels strictement positifs.

1) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 10$

a) Mq il existe $N\in\mathbb{N}$ tq pour tout $n\geq N$ $u_{n+1} \geq 5u_n$. Soit $\varepsilon>0$.
Par définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 10$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$ on a $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 10\right| \leq \varepsilon$

Donc $10 - \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \varepsilon$.

Ainsi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 10-\varepsilon$

En prenant $\varepsilon = 5$ on obtient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 5$ et comme $u_n > 0$ on en déduit $u_{n+1} \geq 5u_n$ pour tout $n\geq N$.

b) Par récurrence P_n : " $u_n \geq 5^{n-N} u_N$ ":
I: $n=N$ on a $u_N = u_N \geq 5^0 u_N = u_N$.
H. Supposons P_n vraie. On a $u_{n+1} \underset{a)}{\geq} 5u_n \underset{\text{hyp de récurrence}}{\geq} 5\times 5^{n-N} u_N = 5^{n+1-N} u_N$.
Donc P_n héréditaire.
C. P_N vraie et P_n héréditaire, ainsi pour tout $n\geq N$ $u_n \geq 5^{n-N} u_N$.

c) Ainsi comme $5^{n-N} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et que $u_N > 0$ est une constante on en déduit que $5^{n-N}u_N \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ donc comme $u_n \geq 5^{n-N}u_N$ on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

2) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.

a) Par définition on a $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\geq N$ $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \varepsilon$.
Ainsi comme les u_n sont positifs $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \varepsilon$ Donc ($u_n>0$) $u_{n+1} \leq u_n\varepsilon$.
En prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$ on conclut.

b) Ainsi on montre par récurrence que $\forall n\geq N$ $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$.
Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc comme $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$ le théorème des gendarmes nous permet de conclure que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

~~XIV~~

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ $\qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$

1) $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+1)n} - \frac{n+1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)}$$ $\qquad n(n+1) \leq (n+1)^2$ donc $\frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{1}{(n+1)^2}$

$$\leq 0$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

On a $u_n \leq u_n + \frac{1}{n} \leq v_n \leq v_1$ $\quad$ ($(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante donc $v_n \leq v_1$)

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée donc converge.

De plus $v_n \geq u_n \geq u_1$ $\quad$ ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante donc $u_n \geq u_1$)

Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc converge.