

Examen 3 – Durée 55 min – le jeudi 12 décembre 2019

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.

La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.

BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE

L'énoncé comporte 4 exercices.

Exercice 1. PGCD et Bezout

1. Calculer $\text{pgcd}(107, 281)$.
2. Soit a et b deux entiers non nuls. Montrer qu'il existe u et v dans \mathbb{Z} tels que $au + bv = \text{pgcd}(a, b)$.
3. Trouver u et v dans \mathbb{Z} tels que $107u + 281v = \text{pgcd}(107, 281)$.

Exercice 2. Equation quadratique et modulo

1. Factoriser (c'est-à-dire écrire comme produit de deux polynômes de degré 1) le polynôme suivant à coefficient réel

$$x^2 + 2x - 3.$$

2. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, si $ab \equiv 0 [17]$ alors $a \equiv 0 [17]$ ou $b \equiv 0 [17]$.
3. Montrer par un exemple que l'implication

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad \left(ab \equiv 0 [15] \Rightarrow (a \equiv 0 [15]) \text{ ou } (b \equiv 0 [15]) \right)$$

est fausse.

4. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$,

$$x^2 + 2x - 3 \equiv 0 \quad [17]$$

si et seulement si $x \equiv 1 [17]$ ou $x \equiv 14 [17]$.

5. Justifier de l'existence de $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \equiv 1 [3]$ et $x \equiv 2 [5]$.
6. Trouver un entier $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \equiv 1 [3]$ et $x \equiv 2 [5]$.
7. Trouver $x \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \equiv 0 & [15] \\ x \not\equiv 1 & [15] \\ x \not\equiv -3 & [15]. \end{cases}$$

Exercice 3. Point fixe.

Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ une fonction.

1. En considérant la fonction auxiliaire $g(x) = f(x) - x$, montrer que si f est continue alors il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = c$.
2. Montrer par un dessin que cela peut être faux si f n'est pas supposée continue.

Exercice 4. Question préparée.

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que $\sup\{f(x) : x \in [0; 1]\}$ est fini et qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que

$$f(c) = \sup\{f(x) : x \in [0; 1]\}.$$

Liste de Questions de cours ou préparées pour le DS3.

1. Énoncer la caractérisation de f continue en x_0 qui commence par $\forall \varepsilon > 0$.
2. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que $\sup\{f(x) : x \in [0; 1]\}$ est fini et qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que

$$f(c) = \sup\{f(x) : x \in [0; 1]\}.$$

Il s'agit de redémontrer un résultat du cours.

3. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
4. Énoncer et démontrer le théorème de Gauss pour les entiers.
5. Soit n et m des entiers naturels non nuls tels que $\text{pgcd}(n, m) = 1$. Soit a et b deux entiers relatifs. Montrer, sans utilisé le théorème chinois, qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{cases} x \equiv a & [n] \\ x \equiv b & [m] \end{cases}$$

6. Soit n et m des entiers naturels non nuls tels que $\text{pgcd}(n, m) = 1$. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que

$$\begin{cases} x \equiv 0 & [n] \\ x \equiv 0 & [m] \end{cases}$$

Exercice 1.

1. On applique l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}
 \text{pgcd}(107, 281) &= \text{pgcd}(281 - 2 * 107, 107) &= \text{pgcd}(67, 107) \\
 &= \text{pgcd}(107 - 67, 67) &= \text{pgcd}(40, 67) \\
 &= \text{pgcd}(67 - 40, 40) &= \text{pgcd}(27, 40) \\
 &= \text{pgcd}(40 - 27, 27) &= \text{pgcd}(13, 27) \\
 &= \text{pgcd}(27 - 2 * 13, 13) &= \text{pgcd}(1, 13) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

2. Posons $d = \text{pgcd}(a, b)$, $a' = a/d$ et $b' = b/d$. Alors $\text{pgcd}(a', b') = 1$. D'après le théorème de Bezout, il existe u et v dans \mathbb{Z} tels que $a'u + b'v = 1$. En multipliant par d , on obtient la relation cherchée.
3. Pour trouver u et v pour $(107, 281)$, on applique l'algorithme d'Euclide étendu. On part ainsi de $1 = 13 - 12 * 1$ et on remonte :

$$\begin{aligned}
 1 &= 13 - 12 * 1 &= -12(27 - 2 * 13) + 13 &= \\
 &= 27 * (-12) + 13 * 25 &= (40 - 27) * 25 - 12 * 27 &= \\
 &= 40 * 25 - 27 * 37 &= 40 * 25 - 37 * (67 - 40) &= \\
 &= 40 * 62 - 67 * 37 &= (107 - 67) * 62 - 67 * 37 &= \\
 &= 107 * 62 - 67 * 99 &= 107 * 62 - (281 - 2 * 107) * 99 &= \\
 &= 281 * (-99) + 107 * 305
 \end{aligned}$$

Exercice 2.

1. Le discriminant vaut $2^2 + 4 * 3 = 16$. Donc les solutions sont $(\pm 4 - 2)/2$ donc $\{1; -3\}$. Ainsi

$$x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3).$$

2. $ab \equiv 0 [17]$ signifie que 17 divise ab . Comme 17 est premier, le théorème de Gauss implique 17 divise a ou b . Donc $a \equiv 0 [17]$ ou $b \equiv 0 [17]$.
3. Comme nous l'avons vu à la question précédente, le point clé est que 15 n'est pas premier : $15 = 3 * 5$. Il suffit de prendre $a = 3$ et $b = 5$.
4. On a $x^2 + 2x - 3 \equiv 0 [17]$ si et seulement si $(x - 1)(x + 3) \equiv 0 [17]$. D'après la question 2, cela équivaut à $x - 1 \equiv 0 [17]$ ou $x + 3 \equiv 0 [17]$, donc à $x \equiv 1 [17]$ ou $x \equiv -3 \equiv 14 [17]$.
5. Comme 3 et 5 sont premiers entre eux, le théorème Chinois assure l'existence de x .
6. On essaie successivement les solutions de $x \equiv 2 [5] : 2, 7, 12, 17, \dots$. Ici, ça va vite, $x = 7$ convient.
7. En fait $x = 7$ convient :

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \equiv (x - 1)(x + 3) \equiv 6 * 10 \equiv 0 & [15] \\ 7 \not\equiv 1 & [15] \\ 7 \not\equiv -3 & [15]. \end{cases}$$

Exercice 3.

1. On a $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Or g est continue comme somme de 2 fonctions continues. Alors le théorème de valeurs intermédiaires assure l'existence de c tel que $0 \leq c \leq 1$ et $g(c) = 0$ c'est-à-dire $f(c) = c$.
2. Il suffit de prendre $f(x) = 1$ si $x < 1$ et $f(1) = 0$.

Exercice 4.

Que le sup soit fini ou non, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[0; 1]$ telle que $f(x_n)$ tend vers le sup. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans $[0; 1]$ disons vers $l \in [0; 1]$.

La continuité de f assure que $f(\lim_n x_{\varphi(n)}) = \lim_n f(x_{\varphi(n)})$. Donc $f(l) = \text{sup}$. On conclut que le sup est fini et qu'il est atteint.