Feuille 6 : Suites réelles

Exercice 6-1

Déterminez les limites éventuelles des suites suivantes, définies par leur terme général.

1. $u_n = \dfrac{n+2}{2n-1}$
2. $u_n = \dfrac{3n^2-2n+3}{n^3-1}$
3. $u_n = \dfrac{3n^2-5}{n+4}$
4. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1}}$
5. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+5}+n}{\sqrt{n^2+1}}$
6. $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
7. $u_n = \sin n$
8. $u_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$
9. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
10. $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{2n+(-1)^n}$
11. $u_n = \cos(n\pi)$
12. $u_n = \dfrac{3^n-2^n}{2^n-3^n}$
13. $u_n = \dfrac{2^n}{n^{100}}$
14. $u_n = \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$
15. $u_n = (-1)^n\dfrac{\cos n}{n}$
16. $u_n = \cos\left(\dfrac{n}{2}\pi\right)$

Exercice 6-2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

1. Montrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrez qu'elle converge et que sa limite l vérifie :
$$\frac{1}{2} \leq l \leq 1.$$
3. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \infty$.

Exercice 6-3

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 8$ et la relation de récurrence $u_n = \dfrac{1}{2}u_{n-1}+3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $v_n = u_n + a$ où a est un réel quelconque. Écrivez v_n en fonction de v_{n-1}.
2. Déterminez une valeur a pour laquelle la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
3. Déterminez v_n en fonction de n.
4. Déterminez u_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite ?

Exercice 6-4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n+8}{2u_n+1}.$$

On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n-2}{u_n+2}.$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{5}$.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 6-5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6-6

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq\ u_n \leq 2$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6-7

Étudiez la convergence et calculez l'éventuelle limite de :

1. $u_{n+1} = \dfrac{1}{6}u_n + 5,\ u_0 = 3$
2. $u_{n+1} = -2u_n + 1,\ u_0 = 0$
3. $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n},\ u_0 = 8$
4. $u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n},\ u_0 = 2$
5. $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{2}{9},\ u_0 = 0$
6. $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1},\ u_0 = 2$

Exercice 6-8

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in [0, 1]$ et $u_n = \dfrac{3 - u_{n-1}^2}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{2}$.
   (a) Montrer que f est décroissante sur $[0, \infty[$.
   (b) Montrer que l'intervalle $[0, \sqrt{3}]$ est laissé stable par f.
   (c) Trouver $l \in [0, +\infty[$ tel que $f(l) = l$.
   (d) On note $I_1 = [0, l]$ et $I_2 = [l, \sqrt{3}]$. Montrer que $f(I_1) \subset I2$ et $f(I_2) \subset I_1$.
   (e) Déduire de ce qui précède que $f \circ f$ est croissante sur $[0, \sqrt{3}]$, et qu'elle laisse stable les intervalles I_1 et I_2.
2. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6-9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{1 + u_n} = 0$. Montrez que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Exercice 6-10

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n + v_n$.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Que peut on dire de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. On suppose que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. Que peut on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Donnez un exemple de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergentes telles que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

Exercice 6-11

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $w_n = u_n^2 + u_n v_n + v_n^2$ soit convergente vers 0.

1. En utilisant une identité remarquable, écrire w_n comme la somme de 2 carrés.
2. En déduire que les deux carrés convergent vers 0.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent aussi vers 0.

Exercice 6-12

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que la sous suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ des termes pairs converge vers l. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente.

Exercice 6-13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 10$
   (a) Justifiez qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \geq 5u_n$.
   (b) Montrez qu'alors, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 5^{n-N} u_N$.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. On suppose à présent que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$
   (a) Justifiez qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.
   (b) En raisonnant comme avant, montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge cette fois vers 0.

Exercice 6-14

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

1. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

Exercice 6.101

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de limite l. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n}.$$

1. Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq l$. En déduire que (v_n) converge.
3. On note l' la limite de (v_n). Peut-on donner une inégalité entre l et l' ?
4. Établir que $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$.
5. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Exercice 6-102

1. Montrez que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n > 0$ par
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$
À l'aide de la question 1, montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminez sa limite.

Exercice 6-103

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 \in]1, 2[$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + \frac{3}{4}$.

1. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$.
2. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 2$.

3. Montrez que la suite est monotone. En déduire sa convergence.
4. Déterminez sa limite.

Exercice 6-104

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1.$$

1. On introduit la fonction $f(x) = (x-1)^2 + 1$. Montrer que f est croissante sur $[1, \infty[$. Déterminer l'image de l'intervalle $]1, 2[$ par f.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.
3. Montrer que la suite (u_n) est monotone.
4. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6-105

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2}.$$

1. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
2. Si la suite (u_n) converge, quelle peut être sa limite éventuelle ?
3. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 3$.
4. Montrez que (u_n) est croissante. Que peut-on en conclure ?

Exercice 6-106

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_n = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculez u_1, u_2 et u_3 .
2. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 2$.
3. Montrez que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
4. Déterminez la limite l de la suite, à partir d'une equation qu'elle doit vérifier.

Exercice 6-107

Étudiez la monotonie des suites définies par les termes généraux suivants :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \text{ (pour } n \geq 1\text{)}, \quad n - 2^n, \quad \frac{e^n}{n!}, \quad (n+1)(n+2)\ldots(n+n), \quad \frac{n-1}{n+3}, \quad n - \operatorname{sh} n.$$

Exercice 6-108

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$

1. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
2. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.