Contrôle, lundi 11 mai 2020

Durée : trois heures

Il sera tenu compte de la rédaction. Les arguments et les raisonnements devront être clairement détaillés. Les résultats du cours utilisés devront être explicitement cités.

La méthode de Gauss-Seidel symétrique.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice **symétrique définie positive** décomposée sous la forme $A = D - L - U$ où D est diagonale, L est triangulaire inférieure stricte et U est triangulaire supérieure stricte. Soit $b \in \mathbf{R}^n$. On cherche à calculer x solution de $Ax = b$. On considère la méthode itérative définie par

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbf{R}^n, \\ (D-L)\, y^{(k)} = Ux^{(k)} + b, \quad k \in \mathbf{N}, \\ (D-U)\, x^{(k+1)} = Ly^{(k)} + b, \quad k \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que les coefficients diagonaux de D sont tous strictement positifs.
2. Montrer que l'algorithme peut s'écrire sous la forme
$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$
avec $B = (D-U)^{-1}L(D-L)^{-1}U$ et $c = (D-U)^{-1}\left(I + L(D-L)^{-1}\right)b$.
3. Soit $(\lambda, p) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ un mode propre de B : $p \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ et $Bp = \lambda p$.
   (a) Montrer que
   $$L\,(D-L)^{-1}\,Up = \lambda\,(A+L)\,p.$$
   (b) Montrer que
   $$LD^{-1}U + LD^{-1}L\,(D-L)^{-1}\,U = L\,(D-L)^{-1}\,U.$$
   Pour ceci, on pourra remarquer que $LD^{-1}U = LD^{-1}(D-L)(D-L)^{-1}U$.
   (c) En déduire que
   $$LD^{-1}Up + LD^{-1}L\,(D-L)^{-1}\,Up = \lambda\,(A+L)\,p. \tag{1}$$
   (d) Montrer que
   $$LD^{-1}L\,(D-L)^{-1}\,Up = \lambda LD^{-1}\,(A+L)\,p. \tag{2}$$
   (e) Déduire des équations (2) et (1) que
   $$LD^{-1}Up + \lambda LD^{-1}\,(A+L)\,p = \lambda\,(A+L)\,p$$
   (f) En déduire que
   $$LD^{-1}Up = \lambda Ap + \lambda Lp - \lambda LD^{-1}(D-U)p.$$
   (g) En déduire que
   $$(1-\lambda)\,LD^{-1}Up = \lambda Ap.$$
4. (a) En multipliant les membres de la dernière égalité par p^* à gauche, montrer que λ est réel et que $\lambda \in [0, 1[$. On pourra utiliser (en le justifiant) le fait que $p^*Ap \in \mathbf{R}_+^*$ et que $p^*LD^{-1}Up \in \mathbf{R}_+$.
   (b) Montrer que si la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ converge (lorsque k tend vers l'infini), elle converge vers un vecteur noté x_∞ qui satisfait à $(I-B)x_\infty = c$. Cette équation a-t-elle une unique solution ?
   (c) Montrer que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ converge.
   (d) Notons y_∞ le vecteur défini par $(D-L)y_\infty = Ux_\infty + b$. Montrer que $Dx_\infty = Dy_\infty$ et en déduire que $x_\infty = y_\infty$.
   (e) Montrer que $x_\infty = x$.

   Cette méthode est une version symétrisée de la méthode de Gauss-Seidel.