Université Claude Bernard-Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019

Analyse matricielle – L3

Examen, lundi 20 mai 2019

Durée : deux heures

Il sera tenu compte de la rédaction. Les arguments et les raisonnements devront être clairement détaillés. Les résultats du cours utilisés devront être explicitement cités.
Documents autorisés : une feuille de notes personnelles (calculatrices interdites).

Exercice 1. *Conditionnement d'une matrice symétrique.*

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour tout matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique définie positive on note $\lambda_{min}(M)$ et $\lambda_{max}(M)$ sa plus petite et sa plus grande valeur propre.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique définie positive. Montrer que

$$\lambda_{min}(M) = \min_{x \neq 0} \frac{x^T M x}{\|x\|_2^2} \quad \text{et} \quad \lambda_{max}(M) = \max_{x \neq 0} \frac{x^T M x, x}{\|x\|_2^2}.$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique définie positive et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice inversible. On note D la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $D_{i,i} = A_{i,i}$ pour tout i, et $M = B^T A B$.
   (a) Montrer que D et M sont symétriques définies positives.
   (b) Soit C la matrice inversible définie par $C^{-1} = BB^T$. Montrer que

$$\lambda_{min}(M) = \min_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T C x} \quad \text{et} \quad \lambda_{max}(M) = \max_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T C x}.$$

   (c) Montrer que $\mathrm{cond}_2(M) = \dfrac{\lambda_{max}(M)}{\lambda_{min}(M)}$.
   (d) On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $x \neq 0$,

$$0 < a \leq \frac{x^T A x}{x^T C x} \leq b.$$

   Montrer que $\mathrm{cond}_2(M) \leq \dfrac{b}{a}$.

Exercice 2.

On considère une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont on suppose qu'elle est diagonalisable sur $\mathbf{R}$: il existe des réels $(\lambda_i)_{i=1}^n$, des vecteurs non nuls de $\mathbf{R}^n$ $(x_i)_{i=1}^n$ (vecteurs propres) et des vecteurs non nuls de $\mathbf{R}^n$ $(y_i)_{i=1}^n$ (vecteurs propres à gauche) tels que

$$\begin{array}{l} Ax_i = \lambda_i x_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ ||x_i||_2 = 1, \quad i = 1, \dots, n, \\ y_i^T A = \lambda_i y_i^T, \quad i = 1, \dots, n. \end{array}$$

1. On considère $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour tout $j \neq i$.
   (a) Montrer que pour tout $j \neq i$ on a $y_j^T x_i = 0$. On pourra pour cela étudier le réel $y_j^T A x_i$.
   (b) Montrer que $y_i^T x_i \neq 0$.
   (c) Montrer qu'il existe $\tilde{y}_i \in \mathbf{R}^n$ tel que $\tilde{y}_i{}^T A = \lambda_i \tilde{y}_i{}^T$ et $\tilde{y}_i{}^T x_i = 1$.

2. On suppose ici que $|\lambda_j| > |\lambda_{j+1}| > 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Pour $j = 1, \ldots, n$ on note $\tilde{y_j}$ le vecteur propre à gauche de A associé à λ_j tel que $\tilde{y_j}^T x_j = 1$.
   (a) On pose $A^{(2)} = A - \lambda_1 x_1 \tilde{y_j}^T$. Montrer que $A^{(2)}$ a pour vecteurs propres les x_j et identifier les valeurs propres associées. Quelle est la valeur propre de plus grand module de $A^{(2)}$?
   (b) Si λ_1, x_1 et y_1 sont connus, proposer un algorithme permettant le calcul approché de λ_2, x_2 et y_2. Expliquer pourquoi (et dans quelles conditions) cet algorithme converge (en précisant pourquoi le théorème démontré en cours s'applique).
   (c) Pour $k = 2, \ldots, n$ on pose $A^{(k)} = A - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \tilde{y_j}^T$. Quels sont les vecteurs propres de $A^{(k)}$? Quelles sont les valeurs propres associées ?

Exercice 3. *Méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel* (6 points).
Pour tout paramètre réel α, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire les matrices d'itération $\mathcal{L}_J$ de la méthode de Jacobi et $\mathcal{L}_{GS}$ de la méthode de Gauss-Seidel.
2. Montrer que la méthode de Jacobi converge (pour tout vecteur initial) si et seulement si $\alpha \in]-1, 1[$.
3. Montrer que la méthode de Gauss-Seidel converge (pour tout vecteur initial) si et seulement si $\alpha \in]-1, 1[$.

Exercice 4. *Moindres carrés.*
On veut résoudre au sens des moindres carrés le système

$$D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire l'équation normale associée au problème aux moindres carrés.
2. Résoudre l'équation normale.
3. Calculer la norme 2 du résidu.