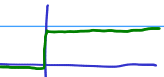
Cours du 18 décembre 2020

Autre mise en garde sur les solutions faibles :

- Considérons la fonction de Heaviside $H_0(x)$ 

Cette fonction est dérivable presque partout (sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$) sa dérivée vaut (presque partout) 0. Il ne faut pas en conclure que la dérivée au sens des distributions de H_0 vaut 0 !

<u>Rappel sur les distributions</u> Considérons $C_c^\infty(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ à support compact. On appelle distribution sur $\mathbb{R}$ un élément du dual de C_c^∞ : d est une distribution si d est une forme <u>linéaire</u> continue sur C_c^∞ :

$$d : \begin{cases} C_c^\infty \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \in C_c^\infty \longmapsto \langle d, \varphi \rangle \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \Big(\overbrace{\langle d, \varphi \rangle}^{\text{crochet de dualité}} \text{ est une notation pour } d(\varphi) \Big)$$

avec
- $\langle d, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha \langle d, \varphi_1 \rangle + \beta \langle d, \varphi_2 \rangle \quad \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in (C_c^\infty)^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
(linéarité)
- Si $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$, $\langle d, \varphi_n \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle d, \varphi \rangle$

quelle topologie ? — topologie de $\mathbb{R}$ (normé).

Notion de convergence sur $C_c^\infty(\mathbb{R})$ | pseudotopologie de $C_c^\infty(\mathbb{R})$: on dit que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ si $\exists K$ compact de $\mathbb{R}$ t.q. $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subset K \ \forall n$, et $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K$, et $\varphi_n^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi^\alpha$ uniformément sur $\mathbb{R}$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}$ (φ^α est la dérivée d'ordre α de φ).

(cf. mes notes de cours sur ma page perso pour plus de détails et la généralisation sur $\mathbb{R}^d$).

$C_c^\infty(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et son dual (l'espace des distribution) est noté $\mathcal{D}'$.

Remarquer que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, f définit une distribution : si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,
$\int_{\mathbb{R}} f\varphi$ existe puisque φ est à support compact.

$\varphi \longmapsto \int f\varphi$ est linéaire et continue (pour la pseudotopologie définie sur $\mathcal{D}$).

La distribution associée à f peut être notée T_f :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int f\varphi.$$

$\mathcal{D}'$ est bien plus « grand » que $L^1_{loc}(\mathbb{R})$:

$$\delta_0 : \begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \longmapsto \varphi(0) \end{cases}$$

est linéaire et continue, mais ne peut pas être représentée par une fonction localement intégrable. δ_0 est appelée masse de Dirac en 0.

Dans $\mathcal{D}'$, on peut tout dériver ! Comment faire ?

On remarque que si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$,

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f' \varphi = - \int_{\mathbb{R}} f \varphi'$$ ← c'est défini même si f n'est pas dérivable.

Définition Soit T une distribution ($T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$).

La dérivée de T est définie comme la distribution T' telle que $\langle T', \varphi \rangle = \langle -T, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

On peut montrer que
- $H_0 \in L^1_{loc}$, donc H_0 définit une distribution (facile : $H_0 \in L^\infty$)
- $H_0' = \delta_0$.

fin du rappel sur les distributions.

$H_0' \neq 0$!

Lors du dernier cours, nous avons défini les solutions faibles de

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(0,\cdot) = u^0 \end{cases}$$: u en est solution faible si

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi \, dx\, dt = - \int u^0(x) \varphi(0,x)\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}).$$

Nous avons vu que cette notion permettait de définir plus de solutions (ex : les solutions discontinues en translation (cf. relation de Rankine-Hugoniot).

Problème : il y a trop de solutions faibles !

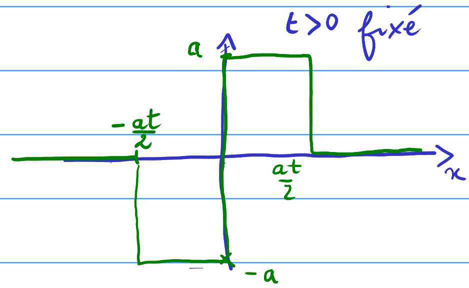
Exemple Considérons $\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0 \\ u(0,x) = 0 \quad \forall x \end{cases}$ (Burgers)

$u(t,x) = 0 \ \forall t,x$ est solution (et même solution classique (ou solution forte)).

Il existe en fait une infinité de solutions faibles :

Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

$$u_a(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{at}{2} \\ -a & \text{si } x \in [-\frac{at}{2}, 0[\\ a & \text{si } x \in [0, \frac{at}{2}[\\ 0 & \text{si } x \geq \frac{at}{2} \end{cases}$$
(pour $t>0$)



(on vérifie que $u(0,x) = 0$ p.p.)

Pour comprendre (ou démontrer) que u_a est solution faible, il suffit de vérifier que chacune de ses discontinuités se propage à une vitesse (σ) qui satisfait à la relation de Rankine-Hugoniot.

Rappel : La dernière fois nous avons montré qu'une discontinuité liant u_G à gauche à u_D à droite se propageant à vitesse σ était solution faible de $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ ssi

$$\sigma = \frac{f(u_D) - f(u_G)}{u_D - u_G}$$

. La discontinuité située en $-\frac{at}{2}$:

vitesse $\sigma = -\frac{a}{2} \overset{?}{=} \frac{f(u_D) - f(u_G)}{u_D - u_G}$ (R-H)

avec
* $f(u) = \frac{u^2}{2}$
* $u_D = -a$
* $u_G = 0$

$$\frac{f(u_D) - f(u_G)}{u_D - u_G} = \frac{\frac{a^2}{2} - 0}{-a - 0} = -\frac{a}{2} \quad \text{OK}$$

. La discontinuité située en 0 :

vitesse $\sigma = 0 \overset{?}{=} \frac{\frac{a^2}{2} - \frac{(-a)^2}{2}}{a - (-a)} = 0$ OK.

. La discontinuité située en $\frac{at}{2}$:

vitesse $\sigma = \frac{a}{2} \overset{?}{=} \frac{0 - \frac{a^2}{2}}{0 - a} = \frac{a}{2}$ OK.

Une infinité de solution, c'est beaucoup trop !

Idée(s) pour avoir une unique solution :

① Tenir compte de phénomènes physiques de diffusion :

on peut considérer que le modèle $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ est en fait $\partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = \underbrace{\varepsilon \partial_{xx} u^\varepsilon}_{\text{terme de diffusion}} = \varepsilon \Delta u^\varepsilon$, avec ε petit.

On peut montrer, en effet, que u^ε est régulière $\forall \varepsilon > 0$ (et que le pb de Cauchy admet une unique solution globale en temps positif).

Question : $u^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{}$ qq chose ? Si c'est le cas, on est tenté d'appelé u ce qq chose, et de dire que la solution de $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ qui nous intéresse est ce u.

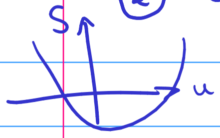
On peut montrer que u^ε converge en effet, lorsque $\varepsilon \to 0^+$!

Pb : c'est très compliqué de calculer la limite des u^ε.

Ce concept de solution de $\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(0,\cdot) = u^0 \end{cases}$

n'est pas très maniable.

② Considérons (comme ci-dessus) u^ε solution de $\partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = \varepsilon \partial_{xx} u^\varepsilon$.



Soit $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^2(\mathbb{R})$ et convexe : $S''(u) \geq 0 \ \forall u$.

On a $\quad S'(u^\varepsilon)\partial_t u^\varepsilon + S'(u^\varepsilon)\partial_x f(u^\varepsilon) = \varepsilon S'(u^\varepsilon)\partial_{xx} u^\varepsilon$.

Rappelons que u^ε est régulière, donc $\partial_x f(u^\varepsilon) = f(u^\varepsilon)\partial_x u^\varepsilon$. Ainsi

$$S'(u^\varepsilon)\partial_t u^\varepsilon + S'(u^\varepsilon) f'(u^\varepsilon)\partial_x u^\varepsilon = \varepsilon S'(u^\varepsilon)\partial_{xx} u^\varepsilon,$$

soit
$$\partial_t S(u^\varepsilon) + \partial_x G(u^\varepsilon) = \varepsilon \partial_x\left(S'(u^\varepsilon)\partial_x u^\varepsilon\right) - \varepsilon S''(u^\varepsilon)\partial_x u^\varepsilon \partial_x u^\varepsilon$$

où $G(u)$ est une primitive de $S'(u)f'(u)$: $G'(u) = S'(u) f'(u)$.

Donc
$$\partial_t S(u^\varepsilon) + \partial_x G(u^\varepsilon) = \varepsilon \partial_{xx} S(u^\varepsilon) - \varepsilon \underbrace{S''(u^\varepsilon)}_{\geq 0}\underbrace{(\partial_x u^\varepsilon)^2}_{\geq 0}.$$

Donc
$$\boxed{\partial_t S(u^\varepsilon) + \partial_x G(u^\varepsilon) \leq \varepsilon \partial_{xx} S(u^\varepsilon)}.$$

Cette inégalité est appelée inégalité d'entropie (et S est une entropie).

Déf On dit que u est solution faible entropique de
$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 & t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,\cdot) = u^0 \end{cases}$$

si u est solution faible, et u vérifie
$$\partial_t S(u) + \partial_x G(u) \leq 0 \qquad (\mathcal{D}')$$
pour toute fonction $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, avec G primitive de $S'f'$.

Déf $\quad \partial_t S(u) + \partial_x G(u) \leq 0$ au sens des distributions

signifie :
$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} S(u)\partial_t \varphi + G(u)\partial_x \varphi \geq -\int_{\mathbb{R}} S(u^0)\varphi(0,x)\,dx$$
$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ à valeurs positives ou nulles.

Idée : Si φ est à valeurs ≥ 0,
$$\iint_{\mathbb{R}_+\ \mathbb{R}} \varphi\, \partial_t S(u) + \varphi\, \partial_x G(u) \leq 0$$
$$= -\int_{\mathbb{R}} \varphi(0,x) S(u^0)\,dx - \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}_+} S(u)\partial_t \varphi - \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} G(u)\partial_x \varphi \leq 0$$

Théorème (Kružkov, années 60)

Soit $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.

Le problème $\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(0,\cdot) = u^0 \end{cases}$ admet une unique solution faible entropique.

Cette solution faible est limite presque partout de $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$, où u^ε est solution de $\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = \varepsilon \partial_{xx} u^\varepsilon \\ u^\varepsilon(0,\cdot) = u^0 \end{cases}$.

FIN DU COURS SUR LES ÉQUATIONS SCALAIRES.

III FLUIDES PARFAITS.

1) Équation de transport conservative.

Par exemple : ρ densité volumique de masse du fluide

Soit ρ une quantité dont les intégrales sont conservées (au cours du temps) dans les volumes matériels dans un fluide de vitesse $u(t,x)$ ($x \in \mathbb{R}$, dimension spatiale 1).
Un volume matériel est un volume qui suit le fluide dans son mouvement (qui se fait donc à vitesse u).

Par exemple, si le volume est un intervalle $[a(t), b(t)]$, on a

$$a'(t) = u(t, a(t)) \quad \text{et} \quad b'(t) = u(t, b(t)).$$

$\int_{a(t)}^{b(t)} \rho(t,x)\,dx$ ne dépend pas de t : $\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} \rho(t,x)\,dx = 0$.

Or

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} \rho(t,x)\,dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_t \rho(t,x)\,dx + b'(t)\,\rho(t,b(t)) - a'(t)\,\rho(t,a(t))$$

$$= \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_t \rho(t,x)\,dx + u(t,b(t))\,\rho(t,b(t)) - u(t,a(t))\,\rho(t,a(t))$$

$$= \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_t \rho(t,x)\,dx + \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_x(\rho u)(t,x)\,dx.$$

Donc $\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} \rho\,dx = 0$ s'écrit $\int_{a(t)}^{b(t)} \partial_t \rho(t,x) + \partial_x(\rho u)(t,x)\,dx = 0$. Ceci étant supposé vrai pour tout intervalle matériel, on en déduit que $\partial_t \rho + \partial_x a\rho = 0$.

En dimension d d'espace, si $\omega(t)$ est un volume matériel, on écrit

$\frac{d}{dt}\int_{\omega(t)} \rho(t,x)\,dx = 0$, et par ailleurs

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega(t)} \rho(t,x)\,dx \overset{\text{Théorème de Reynolds}}{=} \int_{\omega(t)} \partial_t \rho(t,x)\,dx + \int_{\partial\omega(t)} (\rho u)(t,x)\cdot n\,d\sigma$$

(mesure sur $\partial\omega(t)$; $\partial\omega(t)$: bord de $\omega(t)$)

Or

$$\int_{\partial\omega(t)} \rho u\cdot n\,d\sigma \overset{\text{Th. de Green}}{=} \int_{\omega(t)} \nabla\cdot(\rho u)\,dx$$

$$\operatorname{div} v = \nabla\cdot v = \sum_{i=1}^{d} \partial_i v_i \quad \text{pour un champ de vecteurs } v.$$

(Attention ce n'est pas ∇v)

L'équation qui régit l'évolution de ρ est donc :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho u = 0.$$

Problème : dans un fluide, a priori, on ne connaît pas le champ de vitesses u.

2) Une équation supplémentaire (pour tenter de déterminer u !)

On connaît un autre principe fondamental que celui de la conservation de la masse : le second principe de la dynamique de Newton. Ce principe énonce que la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un système de particules est égale à la somme des forces extérieures qui agissent sur ce système.

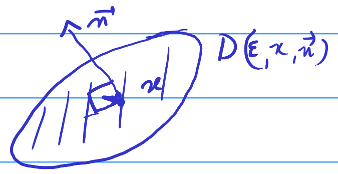
- La quantité de mouvement du fluide contenu dans le volume $\omega(t)$ est $\int_{\omega(t)} \rho u$.
- La somme des forces extérieures s'écrit :

$$\int_{\omega(t)} f \, dx + \int_{\partial\omega(t)} F$$

où f est une densité volumique de force (par exemple, $f = \rho \underbrace{g}_{\text{gravité}}$)

et F est une densité surfacique de force : force exercée par le fluide extérieur à $\omega(t)$ sur $\omega(t)$.

Définition Soit x un point dans le fluide. Soit $\vec{n}$ un vecteur unitaire. Soit $\varepsilon > 0$. On note $D(\varepsilon, x, \vec{n})$ le disque centré en x, orthogonal à n et de surface ε.



Notons $F(\varepsilon, x, \vec{n})$ la force exercée par le fluide situé du côté où $\vec{n}$ pointe sur $D(\varepsilon, x, \vec{n})$.

Si $\dfrac{F(\varepsilon, x, \vec{n})}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} -p(x)\,\vec{n}$ où $p(x)$ est un scalaire qui ne dépend pas de $\vec{n}$, on dit que le fluide est <u>parfait</u>, et p est appelée <u>pression</u> au sein du fluide.

Proposition Considérons un fluide parfait de densité volumique de masse $\rho(t,x)$, de vitesse $u(t,x)$, de pression $p(t,x)$. Supposons que ce fluide est soumis à une force extérieure de densité volumique f.

On a (si on accepte les principes de la mécanique classique !) :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla\cdot(u\rho) = 0 \\ \partial_t \rho u + \nabla\cdot(\rho u \otimes u) + \nabla p = f \end{cases}$$

où • pour v et w champs de vecteurs, $v \otimes w$ est le champ de matrices t.q. $(v\otimes w)_{ij} = v_i w_j \quad \forall i,j = 1 \dots d$.

• pour un champ de matrices M, $\nabla\cdot M$ est le champ de vecteurs dont chaque ligne est la divergence de la ligne correspondante de M : $(\nabla\cdot M)_i = \sum_{j=1}^{d} \partial_j M_{ij}$.

• pour un champ scalaire r, ∇r (gradient de r) est le champ de vecteurs $\begin{pmatrix} \partial_1 r \\ \vdots \\ \partial_d r \end{pmatrix}$.

Démo • OK pour $\partial_t \rho + \nabla\cdot \rho u = 0$

• $\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho u = \int_{\omega(t)} f(t,x)\,dx + \int_{\partial\omega(t)} F(t,x)\,d\sigma$
pour $\omega(t)$ volume matériel.

Or $\int_{\partial\omega(t)} F(t,x)\,d\sigma = -\int_{\partial\omega(t)} p\,\vec{n}\,d\sigma$ (le fluide est supposé parfait)
où $\vec{n}$ est la normale extérieure unitaire sur $\partial\omega$.

Or $\frac{d}{dt}\int_{\omega(t)} \rho u \overset{\text{Reynolds}}{=} \int_{\omega(t)} \partial_t(\rho u) + \int_{\partial\omega(t)} (\rho u)\, u\cdot n$

$\overset{\text{Green}}{=} \int_{\omega(t)} \partial_t \rho u + \int_{\omega(t)} \nabla\cdot(\rho u \otimes u)$,

donc $\int_{\omega(t)} \partial_t \rho u + \nabla\cdot \rho u\otimes u = \int_{\omega(t)} f(t,x)\,dx - \int_{\partial\omega(t)} p(t,x)\,\vec{n}\,d\sigma$

$\overset{\text{Green}}{=} \int_\omega f - \int_\omega \nabla p$

donc $\int_\omega (\partial_t \rho u + \nabla\cdot \rho u\otimes u + \nabla p) = \int_\omega f$.

Finalement, ceci étant vrai $\forall\, \omega(t)$, $\partial_t \rho u + \nabla \cdot \rho u \otimes u + \nabla p = f$.

CQFD.

__Remarques__

- En dimension 1 : $\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0 \\ \partial_t \rho u + \partial_x(\rho u^2 + p) = f \end{cases}$

- On a obtenu d équations : $\partial_t \rho u + \nabla \cdot \rho u \otimes u + \nabla p = f$ est une égalité dans $\mathbb{R}^d$.

  Mais on a une inconnue supplémentaire : p.

  ($d+1$ éq., $d+2$ inconnues).

Idée de modélisation pour __fermer__ le système : écrire p comme une fonction de ρ (fluide __barotrope__).

Ex : $p(\rho) = c\rho$,

$p(\rho) = c\rho^\gamma$ pour $\gamma > 1$.

Ces hypothèses sont souvent raisonnables pour des fluides compressibles (avec faibles variations de température).