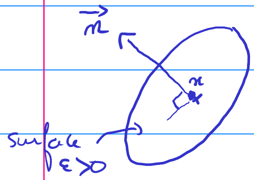
V) FLUIDES VISQUEUX

Déf Soit x un point dans un milieu occupé par un fluide.
Soit $\vec{n}$ un vecteur. Soit $\varepsilon > 0$. On définit $D(\varepsilon, x, \vec{n})$ comme le disque centré en x, de surface ε et orthogonal à $\vec{n}$. Soit $F(\varepsilon, x, \vec{n})$ la force exercée par le fluide situé du côté où $\vec{n}$ pointe sur $D(\varepsilon, x, \vec{n})$.



Supposons que $\dfrac{F(\varepsilon, x, \vec{n})}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} F(x, \vec{n})$ et que l'application $\vec{n} \longmapsto F(x, \vec{n})$ est linéaire : $\exists\, \sigma(x) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ (si l'espace ambiant est $\mathbb{R}^d$) t.q. $F(x, \vec{n}) = \sigma(x)\, \vec{n}$.
$\sigma(x)$ est appelé tenseur des efforts ou tenseur des contraintes en x.

Exemple Cas où $\sigma(x) = -\underbrace{p(x)}_{\text{scalaire}} I_d$: alors le fluide est parfait.

Lemme Dans un fluide de densité $\rho(t,x)$, de vitesse $u(t,x)$ qui admet un tenseur des contraintes $\sigma(t,x)$, on a

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \\ \partial_t \rho u + \nabla \cdot \rho u \otimes u - \nabla \cdot \sigma = f \end{cases}$$

(conservation de la masse, ou équation de continuité)

si le fluide est soumis à un champ de forces extérieur de densité volumique f.

Démo : facile

Nous allons maintenant tenter d'exprimer σ en fonction des caractéristiques du fluide et de l'écoulement.

Soit x_0 un point dans le fluide, et soit (e_1, e_2, e_3) un repère orthogonal tel que $\|e_i\| = \varepsilon$ (petit!). Soit $x_i = x_0 + e_i$. On laisse x_0, x_1, x_2, x_3 évoluer, transportés par le fluide à la vitesse u :
(u est supposé régulier)

$$x_i(\underset{\text{temps}}{h}) = x_i + h\, u(0, x_i) + o(h)$$
$$= x_i + h\, u(0, x_0 + e_i) + o(h)$$
$$= x_i + h\, u(0, x_0) + h\, \nabla u(0, x_0)\, e_i + o(h) + o(\varepsilon)$$

pour $i = 1, 2, 3$, et

$$x_0(h) = x_0 + h\, u(0, x_0) + o(h)$$

Donc $e_i(h) \overset{\text{déf}}{=} x_i(h) - x_0(h) = \underbrace{x_i - x_0}_{e_i} + h\, \nabla u(0, x_0)\, e_i + o(h) + o(\varepsilon)$.

$\left(e_i'(0) = \nabla u(0, x_0)\, e_i + o(\varepsilon) \right)$.

La variation temporelle de e_i s'écrit en fonction du gradient du champ de vitesses, ∇u (champ de matrices).

Écrivons $\nabla u(t,x) = \nabla u = \underbrace{\frac{\nabla u + {}^t\nabla u}{2}}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\frac{\nabla u - {}^t\nabla u}{2}}_{\text{antisymétrique}}$. Ici $d=3$.

* Remarquons que $\frac{\nabla u - {}^t\nabla u}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$ où $\omega = \begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2 \\ \omega_3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\operatorname{rot} u$

En effet, $(\nabla u)_{ij} = \partial_j u_i$, donc $\left(\frac{\nabla u - {}^t\nabla u}{2}\right)_{ij} = \frac{\partial_j u_i - \partial_i u_j}{2}$ ...

Donc $\frac{\nabla u - {}^t\nabla u}{2} e = \omega \wedge e$: la partie antisymétrique de ∇u correspond à une rotation du fluide autour de l'axe $\omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot} u$.

$\left(\text{Rappel : } \operatorname{rot} u = \nabla \wedge u = \begin{pmatrix} \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \end{pmatrix} \right)$.

* $\frac{\nabla u + {}^t\nabla u}{2}$ est une matrice symétrique : $\mathbb{R}$-diagonalisable, $\boxed{\text{en base orthogonale !}}$ de valeurs propres a_1, a_2, a_3.

Supposons que les vecteurs propres associés soient e_1, e_2, e_3 (respectivement) : en réalité on peut faire ce choix dans la définition du repère (x_0, e_1, e_2, e_3).

$$\begin{aligned} e_i(h) &= e_i + h \nabla u\, e_i + o(h) + o(\varepsilon) \\ &= e_i + h \frac{\nabla u + {}^t\nabla u}{2} e_i + h \frac{\nabla u - {}^t\nabla u}{2} e_i + o(h) + o(\varepsilon) \\ &= e_i + \underbrace{a_i h e_i}_{\substack{\text{dilatation} \\ \text{de coef. } a_i}} + \underbrace{h\, \omega \wedge e_i}_{\text{rotation d'axe } \omega} + o(h) + o(\varepsilon) \quad (\text{mouvement solide}) \end{aligned}$$

$= \underline{\text{déformation}}$ locale du fluide

Déf $\frac{\nabla u + {}^t\nabla u}{2} \overset{\text{notation}}{=} D(u)$ est appelé tenseur du taux de déformation dans le fluide.

Déf On dit qu'un fluide incompressible $(\nabla \cdot u = 0)$ est <u>newtonien</u> s'il admet un tenseur des contraintes qui s'écrit

$$\sigma = 2\mu D(u) - p I_d \quad \text{pour } \mu \in \mathbb{R}_+ \text{ et } p \in \mathbb{R}$$

μ est appelé <u>viscosité</u> du fluide, et p pression.

<u>Remarque</u> Pour un fluide compressible, c'est plus compliqué : il y a en plus un terme $\nabla \cdot u \; I_d$ ...

<u>Lemme</u> Dans un fluide incompressible newtonien de densité ρ et de vitesse u, on a

- $\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho u = \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0$ (car $\rho \nabla \cdot u = 0$),
- $\partial_t \rho u + \nabla \rho u \otimes u + \nabla p = \rho(\partial_t u + u \cdot \nabla u) + \nabla p$ (cf. petit calcul du cours précédent)

$= 2\mu \nabla \cdot D(u) + f$ si le fluide est soumis à des efforts extérieurs de densité volumique f.

$= \mu \Delta u + f$.

- $\nabla \cdot u = 0$

Démo (1) $\partial_t \rho + \nabla\cdot\rho u = 0 = \partial_t\rho + \rho\underbrace{\nabla\cdot u}_{0} + u\cdot\nabla\rho$ OK pour la première équation.

(2) $\partial_t \rho u + \nabla\cdot \rho u\otimes u + \nabla p = 2\mu\,\nabla\cdot D(u) + f$ (Newton, Reynolds, Green)

Donc $\rho\partial_t u + u\partial_t\rho + u\nabla\cdot\rho u + \underbrace{(\nabla u)\,\rho u}_{\text{noté } \rho u\cdot\nabla u} + \nabla p = 2\mu\,\nabla\cdot D(u) + f$,

soit $\rho(\partial_t u + u\cdot\nabla u) + u\underbrace{(\partial_t\rho + \nabla\cdot\rho u)}_{0} + \nabla p = 2\mu\,\nabla\cdot D(u) + f$,

soit $\rho(\partial_t u + u\cdot\nabla u) + \nabla p = 2\mu\,\nabla\cdot D(u) + f$.

(3) Montrons que $2\nabla\cdot D(u) = \Delta u$.

$$(\nabla\cdot D(u))_i = \sum_j \partial_j (D(u))_{ij} = \sum_j \partial_j\left(\frac{\partial_j u_i + \partial_i u_j}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Delta(u_i) + \frac{1}{2}\sum_j \partial_j\partial_i u_j$$

$$= \frac{1}{2}(\Delta u)_i + \frac{1}{2}\sum_j \partial_i\partial_j u_j = \frac{1}{2}(\Delta u)_i + \underbrace{\frac{1}{2}\partial_i\Big(\underbrace{\sum_j \partial_j u_j}_{\nabla\cdot u = 0}\Big)}_{0}$$

$$= \frac{1}{2}(\Delta u)_i$$ CQFD.

Pour terminer le cours, nous allons nous intéresser à un régime particulier (et particulièrement simple !) d'écoulement de fluide incompressible newtonien : celui de <u>Stokes</u>.

Supposons que dans l'écoulement la quantité $\rho(\partial_t u + u\cdot\nabla u)$ soit négligeable devant ∇p, $\mu\Delta u$, f. Alors on la néglige ! Pour obtenir

$$\begin{cases} \nabla p = \mu\Delta u + f, \\ \nabla\cdot u = 0 \end{cases}$$

(et $\partial_t\rho + u\cdot\nabla\rho = 0$ est une équation indépendante, que l'on peut résoudre (par la méthode des caractéristiques !) une fois connu le champ u).

Les termes $\rho(\partial_t u + u\cdot\nabla u)$ sont appelés termes d'inertie dans le fluide.

Le système $\begin{cases} \nabla p = \mu\Delta u + f \\ \nabla\cdot u = 0 \end{cases}$ est appelé système de Stokes incompressible.

Ce n'est pas nécessairement un système stationnaire, car f peut dépendre du temps, de même que les conditions aux limites sur le bord du domaine fluide.

On peut penser par exemple à la situation d'un fluide autour d'un obstacle mouvant. L'équation $\nabla p = \mu \Delta u + f$ traduit l'instantanéité de l'équilibre des forces.

Considérons
$$\begin{cases} -\mu \Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \text{ ouvert borné régulier de } \mathbb{R}^d \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$
où f est donné.

La formulation faible de ce problème est :

trouver $u \in (H^1_0(\Omega))^d$ t.q. $\exists p \in L^2(\Omega)$ t.q.
$$\begin{cases} \int (\nabla u : \nabla v - p \nabla \cdot v) = \int f \cdot v \quad \forall v \in (H^1_0(\Omega))^d \\ \text{et } \nabla \cdot u = 0 \end{cases}$$

Si u est solution, avec pression p. Soit $a \in \mathbb{R}$.
Alors $\int \nabla u : \nabla v - (p+a) \nabla \cdot v = \int f \cdot v - \int a \nabla \cdot v$.
Or $-\int a \nabla \cdot v = -a \int \nabla \cdot v = -a \int_{\partial\Omega} v \cdot n = 0$ car $v \in (H^1_0)^d$
donc $p+a$ est une pression admissible.

où $A : B = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij} \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$,

ce qui se réécrit

trouver $u \in (H^1_0(\Omega))^d$ et $p \in L^2(\Omega)$ à $\boxed{\text{moyenne nulle}}$ t.q.

→ permet d'avoir existence ... ET UNICITÉ de p

$$\begin{cases} \int (\nabla u : \nabla v - p \nabla \cdot v) = \int f \cdot v \quad \forall v \in (H^1_0(\Omega))^d \\ \text{et } \int q \nabla \cdot u = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega) \text{ à moyenne nulle.} \end{cases}$$

Or, le pb Trouver $u \in (H^1_0(\Omega))^d$ t.q. $\int \nabla u : \nabla v = \int f \cdot v \quad \forall v \in (H^1_0(\Omega))^d$

revient à minimiser
$$J(u) = \frac{1}{2} \int \nabla u : \nabla u - \int f \cdot u \quad \text{sur } (H^1_0(\Omega))^d$$
(cf. le théorème de Lax-Milgram).

Minimiser J sur $(H^1_0(\Omega))^d$ SOUS LA CONTRAINTE $g(u) = 0$ (d'un certain espace)
s'écrit : trouver λ / $\nabla J(u) + \nabla g(u) \cdot \lambda = 0$ (cette équation n'est pas scalaire)
(λ : multiplicateur de Lagrange associé à $g(u)=0$) :
cette équation est appelée équation d'Euler-Lagrange.

<u>Formellement</u> : $J : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to F$ | Minimiser J sur E sous la contrainte $g(u) = 0 \in F$
s'écrit $\underbrace{\nabla J(u)}_{\in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})} + \underbrace{\nabla g(u)}_{\in \mathcal{L}(E,F)} \underbrace{\lambda}_{\in F} = 0$.

Ici : $E = (H^1_0(\Omega))^d$, $F = L^2$,

$\nabla J(u) : \quad v \longmapsto \nabla J(u) \cdot v = \int (\nabla u : \nabla v - f \cdot v)$

$\nabla g(u) : \quad v \longmapsto \nabla g(u) \cdot v = \nabla \cdot v$

Autrement dit : l'équation d'Euler-Lagrange est

$\exists \lambda \in L^2(\Omega) \,/\, \int (\nabla u : \nabla v - f \cdot v + \lambda \nabla \cdot v) = 0 \quad \forall v \in (H^1_0(\Omega))^d$:

c'est exactement la précédente formulation faible du système de Stokes incompressible avec $\lambda = -p$

$p \longleftrightarrow$ multiplicateur de Lagrange associé à $\nabla \cdot u = 0$ ...

Pour montrer le caractère bien posé de Stokes : cf. Evans.

FIN !