Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2019-2020

Analyse matricielle-L3

Corrigé des exercices 5 et 6 de la feuille d'exercices n° 3

Corrigé de l'exercice 4 de l'examen année 2019

Recherche de valeurs propres

Corrigé de l'exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = X^2 + 1$. Les valeurs propres sont $\{i, -i\}$.

   Un vecteur propre associé à i est $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$; un vecteur propre associé à $-i$ est $\bar{v}$.

2. Soit $x \in \mathbb{C}^2$ non nul.

   On travaille dans $\mathbb{C}^2$, donc pour $y, z \in \mathbb{C}^2$, $\|y\|^2 = |y_1|^2 + |y_2|^2$ et $\langle y, z\rangle = y_1\overline{z_1} + y_2\overline{z_2}$.

   (a) On remarque que $A^2 = -I_2$ (on sait que $\chi_A(A) = 0_{\mathcal{M}_2}$) et donc, par une récurrence immédiate, on obtient
   $$\forall k \in \mathbb{N}^* : A^{2k} = (-1)^k I_2 \text{ et } A^{2k+1} = (-1)^k A,$$
   et donc
   $$\forall (k, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^2 : A^{2k}x = (-1)^k x \text{ et } A^{2k+1}x = (-1)^k Ax.$$

   (b) Une première remarque : si on considère des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ seulement, on remarque que pour tout $y \in \mathbb{R}^2$, $\langle Ay, y\rangle = 0$ et donc, si $x \in \mathbb{R}^2$, la matrice A étant à coefficients réels, tous les vecteurs $x^{(k)}$ sont dans $\mathbb{R}^2$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\langle Ax^{(k)}, x^{(k)}\rangle = 0$: la suite $(\langle Ax^{(k)}, x^{(k)}\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, mais 0 n'est pas une valeur propre de A.

   Étudions le cas général où $x \in \mathbb{C}^2$.

   D'abord, la matrice A est unitaire ($AA^* = I_2$), elle conserve la norme 2 et le produit scalaire. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $\|A^k x\| = x$ et donc $x^{(k)} = \frac{1}{\|x\|}A^k x$. Ainsi,
   $$\langle Ax^{(k)}, x^{(k)}\rangle = \frac{1}{\|x\|^2}\langle A^{k+1}x, A^k x\rangle = \frac{1}{\|x\|^2}\langle Ax, x\rangle,$$
   en utilisant le fait que A^k conserve le produit scalaire.

   Ainsi, la suite $(\langle Ax^{(k)}, x^{(k)}\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante. Elle converge vers une valeur propre λ de A si et seulement si elle est constante égale à cette valeur propre λ si et seulement si $\langle Ax, x\rangle = \lambda\|x\|^2$.

   Les valeurs propres de A sont de module 1.

   Supposons que $\langle Ax, x\rangle = \lambda\|x\|^2$. On a donc $|\langle Ax, x\rangle| = \|x\|^2$. Or, on sait par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $|\langle Ax, x\rangle| \leq \|Ax\|\|x\| = \|x\|^2$, avec égalité si et seulement si Ax et x sont colinéaires si et seulement s'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $Ax = \mu x$ si et seulement si x est un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ.

   On réinjecte et on obtient $\mu\|x\|^2 = \langle Ax, x\rangle = \lambda\|x\|^2$. Ainsi, $\mu = \lambda$, et x est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Réciproquement, si x est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ on a bien $\langle Ax, x\rangle = \lambda\|x\|^2$.

En conclusion, la suite $(\langle Ax^{(k)}, x^{(k)}\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une valeur propre de A si et seulement si x est un vecteur propre de A.

Qu'a-t-on mis en évidence dans cet exercice ?

Le théorème vu en cours sur la convergence de la méthode de la puissance contient l'hypothèse qu'il y a une seule valeur propre de plus grand module. Cette hypothèse n'est pas satisfaite ici ; en effet, i et $-i$ sont deux valeurs propres distinctes de module maximal.

Corrigé de l'exercice 6

Faisons le rappel suivant :

Rappel : Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \neq (0,0)$, on pose alors $Q = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, on vérifie que Q est symétrique et que $QQ^T = 1$, et en enfin

$$QA = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} := R$$

On obtient alors la décomposition QR suivante :

$$A = Q.R = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}}_{Q} \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix}}_{R}.$$

Les itérations successives de la méthode QR sont :

Étape 1.

On pose $A_1 = A$.

Étape 2.

On calcule la décomposition QR de A_1 : $A_1 = Q_1R_1$ avec $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on pose donc :

$$A_2 = R_1Q_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Étape 3.

On calcule la décomposition QR de A_2 : $A_2 == Q_2R_2$, avec $Q_2 = Q_1$ et $R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; par suite on pose :

$$A_3 = R_2Q_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Comme $A_3 = A$, on a alors (par une récurrence immédiate) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, A_{2k} = A_2 \text{ et } A_{2k+1} = A.$$

La méthode ne converge pas puisque $A_2 \neq A$.

Comme dans l'exercice précédent, les hypothèses du théorème vu en cours sur la méthode QR de recherche des valeurs propres ne sont pas satisfaites : A admet deux valeurs propres ayant le même module.

Corrigé de l'exercice 4 de l'examen année 2019

Avant de commencer, remarquons que les vecteurs $(y_i)_{i=1}^n$ sont des vecteurs propres de A^T. En effet, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $y_i^T A = \lambda_i y_i^T$ donc $A^T y_i = \lambda_i y_i$.

1. On considère $i \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour tout $j \neq i$.

   (a) Pour répondre à la question 1.a) à savoir "montrer que pour tout $j \neq i$ on a $y_j^T x_i = 0$", partons d'un j quelconque tel que $j \neq i$. On a alors $\lambda_i \langle x_i, y_j \rangle = \langle A x_i, y_j \rangle = \langle x_i, A^T y_j \rangle = \lambda_j \langle x_i, y_j \rangle$; par suite, $(\lambda_i - \lambda_j)\langle x_i, y_j \rangle = 0$. Or $\lambda_i \neq \lambda_j$, ainsi on a $\langle x_i, y_j \rangle = 0$.

   (b) Pour la question 1.b) à savoir "montrer que $y_i^T x_i \neq 0$" nous vous proposons un raisonnement par l'absurde. Supposons que $y_i^T x_i = \langle x_i, y_i \rangle = 0$, alors pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$, $\langle x_i, y_j \rangle = 0$. Or $(y_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on en déduit donc que $x_i = 0$, ce qui conduit à une absurdité. Ainsi, $y_i^T x_i \neq 0$.

   (c) Pour la question 1.c) à savoir "montrer qu'il existe $\tilde{y_i} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\tilde{y_i}^T A = \lambda_i \tilde{y_i}^T$ et $\tilde{y_i}^T x_i = 1$", essayons de s'inspirer du résultat dans 1.b). En effet, il est clair d'après 1.b) que $\langle x_i, y_i \rangle \neq 0$. Posons alors $\tilde{y_i} = \dfrac{1}{\langle x_i, y_i \rangle} y_i$. Il est alors évident que $\tilde{y_i}$ ainsi construit vérifie d'une part, d'après l'hypothèse de l'exercice, $\underbrace{\dfrac{1}{\langle x_i, y_i \rangle} y_i^T}_{\tilde{y_i}^T} A = \dfrac{1}{\langle x_i, y_i \rangle} \lambda_i y_i^T = \lambda_i \underbrace{\dfrac{1}{\langle x_i, y_i \rangle} y_i^T}_{\tilde{y_i}^T}$.

   D'autre part, par définition du produit scalaire on a $\dfrac{1}{\langle x_i, y_i \rangle} y_i^T x_i = \dfrac{\langle y_i, x_i \rangle}{\langle x_i, y_i \rangle} = 1$.

2. On suppose ici que $|\lambda_j| > |\lambda_{j+1}| > 0$ pour tout $j \in \{1,\ldots,n-1\}$. Pour $j \in \{1,\ldots,n-1\}$ on note $\tilde{y_j}$ le vecteur propre à gauche de A associé à λ_j tel que $\tilde{y_j}^T x_j = 1$.

   (a) Soit $A^{(2)} = A - \lambda_1 x_1 \tilde{y_1}^T$.
   On a pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $A^{(2)} x_i = A x_i - \lambda_1 x_1 (\tilde{y_1}^T x_i) = \lambda_i x_i - \lambda_1 x_1 (\tilde{y_1}^T x_i)$.
   Pour tout $i = 2,..,n$, d'après 1.a) $\tilde{y_1}^T x_i = 0$ par suite $A^{(2)} x_i = \lambda_i x_i$.
   De plus $A^{(2)} x_1 = 0$. Ainsi les valeurs propres sont $\{0, \lambda_2, .., \lambda_n\}$ et λ_2 est la valeur propre de plus grand module.

   (b) Si λ_1, x_1 et y_1 sont connus, un algorithme (vu en cours) permettant d'approcher λ_2, x_2 et y_2 est l'algorithme (méthode) de la puissance itérée, qui est convergent car $|\lambda_2| > |\lambda_3| \geq .. \geq |\lambda_n|$.

   (c) Pour $k = 2,\ldots,n$ soit $A^{(k)} = A - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j x_j \tilde{y_j}^T$.
   En utilisant le même raisonnement qu'au 2.a), on montre que $A^{(k)} x_i = 0$ pour $i = 1,..,k-1$ et que $A^{(k)} x_i = \lambda_i x_i$ pour $i = k,..,n$.